א. נסמן ב- $2x$ את המהירות של המכונית הראשונה בתחילת הדרך (קמ"ש) .

נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

	זמן - t שעות	מהירות - v ק"מ לשעה	דרך-מרחק - s ק"מ
מכונית ראשונה בהתחלה	1.5	$2x$	$3x$
מכונית ראשונה אחרי ההאטה	$\frac{300-3x}{x}$	x	$300-3x$
מכונית שנייה	$\frac{300}{2x-25}$	$2x-25$	300

המכוניות יצאו ביחד לדרך, כאשר המכונית הראשונה הגיעה חצי שעה אחרי המכונית השנייה.

$$1.5+\frac{300-3x}{x}=\frac{300}{2x-25}+0.5$$
$$1+\frac{300-3x}{x}=\frac{300}{2x-25}$$
$$x(2x-25)+(300-3x)(2x-25)=300x$$
$$-4x^2+350x-7500=0$$
$$x=50,\quad x=37.5$$

אם $x=50$, אז מהירות המכונית הראשונה 100 קמ"ש

ומהירות המכונית השנייה 75 קמ"ש (גדולה מ- 60 קמ"ש).

אם $x=37.5$, אז מהירות המכונית הראשונה 75 קמ"ש

ומהירות המכונית השנייה 50 קמ"ש (קטנה מ- 60 קמ"ש).

תשובה: מהירות המכונית השנייה 75 קמ"ש .

ב. האפשרות ראשונה היא שהמרחק של 12.5 ק"מ הוא לפני ההאטה.

אם t הוא זמן הנסיעה, אז המשוואה המתאימה היא $100t=75t+12.5$, שפתרונה $t=0.5$.

האפשרות השנייה היא שהמרחק של 12.5 ק"מ הוא אחרי ההאטה.

עד ההאטה נוצר מרחק של 37.5 ק"מ בין המכוניות (מכפלת הפרש המהירויות בזמן הנסיעה $25\cdot1.5=37.5$),

ולכן יש לסגור פער של 25 ק"מ, על-מנת להגיע למרחק המבוקש של 12.5 ק"מ.

המשוואה המתאימה היא $50t+25=75t$, שפתרונה $t=1$, ובהתאם 2.5 שעות מתחילת הנסיעה.

תשובה: המרחק בין שתי המכוניות הוא 12.5 ק"מ, כעבור חצי שעה או שעתיים וחצי – מתחילת הנסיעה.

א. נתון כי בסדרה החשבונית: $a_4+a_8+a_{12}+a_{16}=224$.

$$a_1+3d+a_1+7d+a_1+11d+a_1+15d=224$$
$$4a_1+36d=224$$
$$a_1+9d=56$$
$$a_{10}=56$$

$$S_{19}=\frac{19\cdot(2a_1+18d)}{2}$$
$$S_{19}=19\cdot(a_1+9d)$$
$$S_{19}=19\cdot 56$$
$$\boxed{S_{19}=1,064}$$

תשובה: $S_{19}=1,064$.

ב. $S_n=n\cdot a_n$

$$S_{10}=10\cdot a_{10}$$
$$S_{10}=10\cdot 56$$
$$S_{10}=560$$
$$560=\frac{10\cdot(2a_1+9d)}{2}$$
$$112=2\cdot(56-9d)+9d$$
$$112=112-18d+9d$$
$$\boxed{d=0}$$

תשובה: הוכח.

ג. המסקנה מהסעיף הקודם: הסדרה קבועה, וכל איבריה שווים ל- 56**.**

תשובה: האיבר הראשון של הסדרה הוא 56 .

ד. $b_{n+1}-b_n=a_n+S_n$**.**

$$b_{n+1}-b_n=56+n\cdot a_n$$
$$b_{n+1}-b_n=56+n\cdot 56$$
$$b_{n+1}-b_n=56\cdot(1+n)$$

$$(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+(b_4-b_3)+\ldots+(b_{20}-b_{19})=$$
$$56\cdot(1+1)+56\cdot(1+2)+56\cdot(1+3)+\ldots+56\cdot(1+19)=$$
$$56\cdot(2+3+4+\ldots+20)=$$
$$56\cdot(\frac{19\cdot(2+20)}{2})=\boxed{11,704}$$

תשובה: הסכום המבוקש הוא $11,704$.

א. נגדיר את המאורעות הבאים:

A **- קיבוצניקים** B **- מושבניקים** C **- עירוניים**

D **- הצליחו בבחינה** $\overline{D}$ **- נכשלו בבחינה**

נתונים ומשמעויות מיידיות

$$P(A)=0.2\ ,\ P(B)=0.4\ ,\ P(C)=0.4$$

$$P(D)=0.7 \quad \to P(\overline{D})=0.3$$

$$P(\overline{D}/B)=\frac{1}{8} \quad \to P(D/B)=\frac{7}{8}$$

$$P(C\cap D)=2.5P(A\cap D)\to P(A\cap D)=x,\quad P(C\cap D)=2.5x$$

פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית

$$P(\overline{D}/B)=\frac{P(\overline{D}\cap B)}{P(B)}$$

$$\frac{1}{8}=\frac{P(\overline{D}\cap B)}{0.4}$$

$$P(\overline{D}\cap B)=0.05 \quad \to P(D\cap B)=0.4-0.05=0.35$$

על פי השורה השנייה בטבלה: $x+0.35+2.5x=0.7 \quad \to x=0.1$

נציב בטבלה ונשלים נתונים.

	A **קיבוצניקים**	B **מושבניקים**	C **עירוניים**	
D **הצליחו בבחינה**	$x=0.1$	0.35	$2.5x=0.25$	0.7
$\overline{D}$ **נכשלו בבחינה**	0.1	0.05	0.15	0.3
	0.2	0.4	0.4	1

$$P(\overline{C}/\overline{D})=\frac{P(\overline{C}\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\frac{0.1+0.05}{0.3}=0.5$$

תשובה: ההסתברות לבחור, באקראי, נבחן שלא היה מעיר מבין הנכשלים היא 0.5 **.**

ב. (1) $P(\overline{B}/D)=\frac{P(\overline{B}\cap D)}{P(D)}=\frac{0.1+0.25}{0.7}=0.5$

תשובה: ההסתברות שמשה, שהצליח בבחינה, לא היה ממושב היא 0.5 **.**

(2) נחשב את ההסתברות למאורע המשלים שאף אחד מהמצליחים היה ממושב, והיא $0.5^5=\frac{1}{32}$

תשובה: ההסתברות שלפחות אחד מחמשת הנבחנים שהצליחו היה ממושב היא $1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$ **.**

נתונים

.1 ABCE **טרפז** $AB \parallel EC$ **.2** $CF \perp BE$ **.3** $CD = DE$

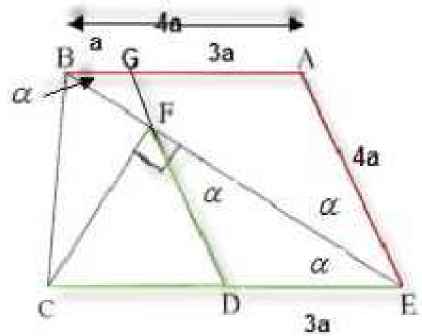
.4 $\sphericalangle CEB = \sphericalangle AEB$ **.5** $EA = 4a$ **.6** $ED = 3a$

עבור ב: .7 $S_{\Delta EAB} = s$

צ"ל: א. $\Delta EAB \sim \Delta EDF$

ב. $S_{\Delta CEF}$

ג. $S_{\Delta BFG}$



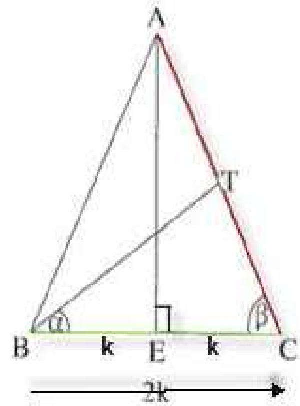
הסבר		טענה	נימוק
1	8	$AB \parallel EC$	נתון
2	9	$CF \perp BE$	נתון
3	10	$CD = DE$	נתון
9, 10	11	$FD = DE = CD$	התיכון ליתר שווה למחצית היתר ΔCFE
11	12	$\sphericalangle CEB = \sphericalangle EFD = \alpha$	זוויות בסיס שוות במש"ש ΔDFE + סימון
8, 12	13	$\sphericalangle ABE = \sphericalangle CEB = \alpha$ (ז)	זוויות מתחלפות שוות בין מקבילים וכלל המעבר
4, 12	14	$\sphericalangle CEB = \sphericalangle AEB = \alpha$ (ז)	נתון וכלל המעבר
13, 14	15	$\Delta EAB \sim \Delta EDF$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. א	
5	16	$EA = 4a$	נתון
6	17	$ED = 3a$	נתון
15, 16, 17	18	יחס הדמיון הוא $\frac{EA}{ED} = \frac{4}{3}$	יחס צלעות מתאימות בין משולשים דומים, הצבה וחישוב
15, 18	19	$\frac{S_{\Delta EAB}}{S_{\Delta EDF}} = \frac{16}{9}$	יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
7	20	$S_{\Delta EAB} = s$	נתון
19, 20	21	$S_{\Delta EDF} = \frac{9}{16}s$	הצבה וחישוב
11, 21	22	$S_{\Delta CEF} = \frac{9}{8}s$	התיכון מחלק את ΔCFE לשני משולשים שווי שטח וחישוב
		מ.ש.ל. ב	

הסבר		טענה	נימוק
12, 14	23	$\sphericalangle AEB = \sphericalangle EFD = \alpha$	כלל המעבר
23	24	$AE \parallel DG$	אם זוויות מתחלפות שוות אז הישרים מקבילים
8, 24	25	GAED מקבילית	שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות
17, 25	26	$GA = 3a$	צלעות נגדיות שוות במקבילית
15, 16, 18	27	$AB = 4a$	על פי יחס הדמיון
26, 27	28	$BG = a$	הפרש קטעים
	29	$\sphericalangle GFB = \sphericalangle EFD$ (ז)	זוויות קדקודיות שוות זו לזו
13, 29	30	$\Delta BGF \sim \Delta EDF$	משפט דמיון זווית זווית
17, 28, 30	31	יחס הדמיון הוא $\frac{BG}{ED} = \frac{1}{3}$	יחס צלעות מתאימות בין משולשים דומים, הצבה וחישוב
30,31	32	$\frac{S_{\Delta BGF}}{S_{\Delta EDF}} = \frac{1}{9}$	יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
21, 32	33	$S_{\Delta BGF} = \frac{1}{16}s$	הצבה וחישוב
מ.ש.ל. ג			

א. ΔABC **שווה שוקיים (** $AB=AC$), $\sphericalangle ACB=\beta$ **,** $\sphericalangle TBC=\alpha$ **,** $BC=2k$ **,** $AT=TC=\frac{AC}{2}$,

AE **גובה לבסיס. הגובה לבסיס במש"ש הוא גם תיכון, לכן** $EB=EC=k$ **.**

(1) ΔAEC **ישר זווית.**



$$\cos\beta=\frac{EC}{AC}$$

$$\boxed{AC=\frac{k}{\cos\beta}}$$

$$\boxed{TC=\frac{k}{2\cos\beta}} \leftarrow AT=TC=\frac{AC}{2}$$

תשובה: $TC=\frac{k}{2\cos\beta}$ **.**

(2) ΔBTC **לפי משפט הסינוסים.**

$$\frac{TC}{\sin\alpha}=\frac{BC}{\sin(180^\circ-(\alpha+\beta))}$$

$$\boxed{TC=\frac{2k\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}}$$

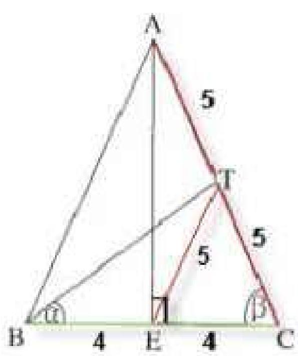
$$\frac{2\cancel{k}\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta))}=\frac{\cancel{k}}{2\cos\beta}$$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=4\sin\alpha\cos\beta}$$

תשובה: הוכח.

ב. נתון: $TE=$ 5 **ס"מ ,** $k=$ 4 **ס"מ.**

(1) $TC=$ 5 **ס"מ (התיכון ליתר שווה למחצית היתר** ΔAEC**).**



$$TC=\frac{k}{2\cos\beta}$$

$$5=\frac{4}{2\cos\beta}$$

$$\boxed{\beta=66.42^\circ}$$

תשובה: $\beta=66.42^\circ$ **.**

(2) $\sin(\alpha+\beta)=4\sin\alpha\cos\beta$

$$\sin(\alpha+66.42^\circ)=4\sin\alpha\cos 66.42^\circ$$

$$\sin\alpha\cos 66.42^\circ+\cos\alpha\sin 66.42^\circ=4\sin\alpha\cos 66.42^\circ$$

$$\cos\alpha\sin 66.42^\circ=3\sin\alpha\cos 66.42^\circ \quad /:\cos\alpha\neq 0$$

$$\frac{\tan 66.42^\circ}{3}=\tan\alpha$$

$$\boxed{\alpha=37.37^\circ}$$

תשובה: $\alpha=37.37^\circ$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2-\sin 2x$ **, בתחום** $-\frac{\pi}{2}\le x\le 0$ **.**

הפונקציה שיש להביא למינימום או מקסימום, מוחלטים, היא $m=f'(x)=2x-2\cos 2x$ **.**

נמצא את נקודות הקצה:

$$m(-\frac{\pi}{2})=f'(-\frac{\pi}{2})=2\cdot(-\frac{\pi}{2})-2\cos(2\cdot(-\frac{\pi}{2}))=-1.14$$
$$m(0)=f'(0)=2\cdot 0-2\cos(2\cdot 0)=-2$$

נמצא נקודות קיצון מקומיות של פונקציית השיפוע: $m'=f''(x)=2+4\sin 2x$

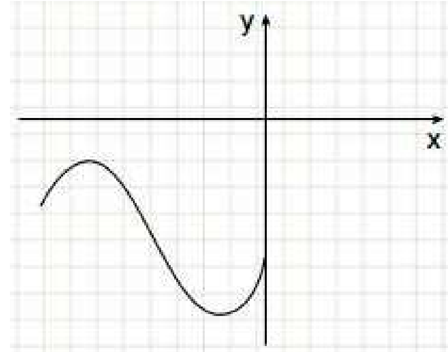
$$2+4\sin 2x=0$$
$$\sin 2x=-0.5=\sin(-\frac{\pi}{6})$$
$$2x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k \qquad 2x=\frac{7\pi}{6}2\pi k$$
$$x=-\frac{\pi}{12}+\pi k \qquad x=\frac{7\pi}{12}+\pi k$$
$$k=0 \qquad k=-1$$
$$(-\frac{\pi}{12},-2.256) \qquad (-\frac{5\pi}{12},-0.866)$$

נבנה טבלת עלייה ירידה, תוך שימוש בערכי פונקצית השיפוע .

$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{5\pi}{12}$		$-\frac{\pi}{12}$		0	x
-1.14		-0.866		-2.256		-2	$m=f'(x)$
Min	↗	**Max**	↘	**Min**	↗	**Max**	**מסקנה**

תשובה: השיפוע הגדול ביותר הוא -0.866 **, השיפוע הקטן ביותר הוא** -2.256 **.**

ב. הסקיצה המתאימה של גרף הנגזרת .



ג. (1) על פי תחומי העלייה והירידה של $f'(x)$, ניתן לקבוע את תחומי החיוביות/ השליליות של $f''(x)$.

הם חיוביים עבור $-\frac{5\pi}{12}<x<-\frac{\pi}{2}$ **או** $\frac{-\pi}{12}<x<0$**, ובהתאם** $f(x)$ **קעורה כלפי מעלה** $(\cup)$ **בתחום זה.**

הם שליליים עבור $-\frac{\pi}{12}<x<-\frac{7\pi}{12}$ **, ובהתאם** $f(x)$ **קעורה כלפי מטה** $(\cap)$ **בתחום זה.**

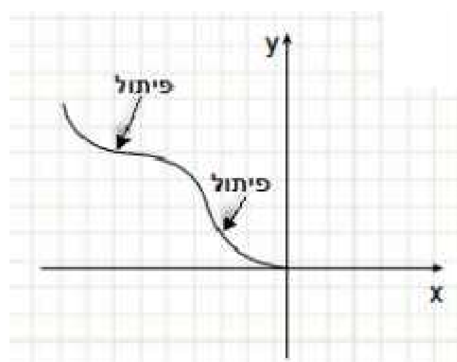
תשובה: $f(x)$ **קעורה כלפי מעלה** $(\cup)$ **עבור** $-\frac{5\pi}{12}<x<-\frac{\pi}{2}$ **או** $\frac{-\pi}{12}<x<0$,

$f(x)$ **קעורה כלפי מטה** $(\cap)$ **עבור** $-\frac{\pi}{12}<x<-\frac{7\pi}{12}$.

(2) נשים לב שנגזרת הפונקציה שלילית לכל $-\frac{\pi}{2}\le x\le 0$**, ולכן הפונקציה יורדת בתחום זה.**

נחשב את ערכי $f(x)$ **בקצוות, ונקבל** $(0,0)$**,** $(-\frac{\pi}{2},2.467)$ **כנקודות קצה.**

הסקיצה המתאימה:



א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^3+2ax}{\sqrt{x^4+4x^2+4}}$ **(** $a>0$ **פרמטר).**

נראה שניתן לפשט את תבנית הפונקציה.

$$f(x)=a\cdot\frac{x^3+2x}{\sqrt{(x^2+2)^2}}$$

$$f(x)=a\frac{x(x^2+2)}{x^2+2}$$

$$\boxed{f(x)=ax}$$

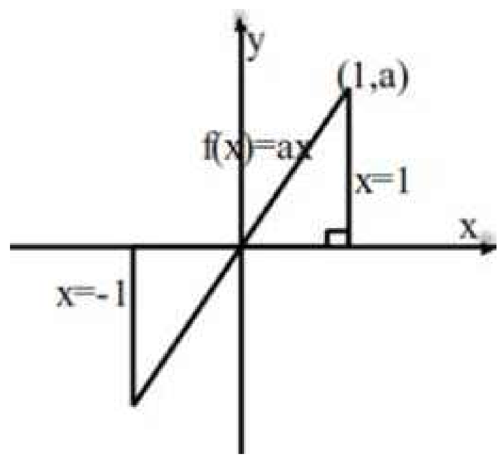
וקבלנו שהפונקציה היא פונקציה קווית עולה ($a>0$ **).**

נציין ש- $\sqrt{(x^2+2)^2}=x^2+2$ **כי** $x^2+2>0$ **לכל** x , **אחרת היינו צריכים להשתמש בערך מוחלט.**

(1) תחום ההגדרה כל x .

(2) הפונקציה אי-זוגית - $f(-x)=-ax=-f(x)$.

(3) עקב אי הזוגיות של הפונקציה, שטח שני המשולשים שווים, ולכן שטח כל אחד הוא $\frac{1}{2}\cdot4=2$



$$2=\frac{1\cdot a}{2}\quad\rightarrow\boxed{a=4}$$

תשובה: $a=4$.

ד. נתון כי $f(x)=g'(x)$.

(1) $g(0)=f(0)=0$ **, כי הגרפים של** $f(x)$ **ו-** $g(x)$ **נחתכים גם כאשר** $x=0$.

$$g(x)=\int f(x)\,dx=\int 4x\,dx$$

$$g(x)=2x^2+c$$

$g(0)=0$ **, ולכן** $g(x)=2x^2$.

תשובה: הוכח.

(2) $4x>2x^2$ **ובהתאם** $2x(2-x)>0$ **. אי השוויון מתקיים עבור** $0<x<2$ **(הביטוי הוא של פרבולה הפוכה).**

תשובה: $0<x<2$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=(1+\frac{1}{x})^n$ **,** $x\neq 0$ **,** $n>1$ **טבעי.**

$x=0$ **מאפס את המכנה ולא את המונה, לכן** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

$x\to\infty$ **הביטוי שבסוגריים שואף ל-** 1 **, ומכיוון ש** $1^n=1$ **אז** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית.**

תשובה: $x=0$ **,** $y=1$ **.**

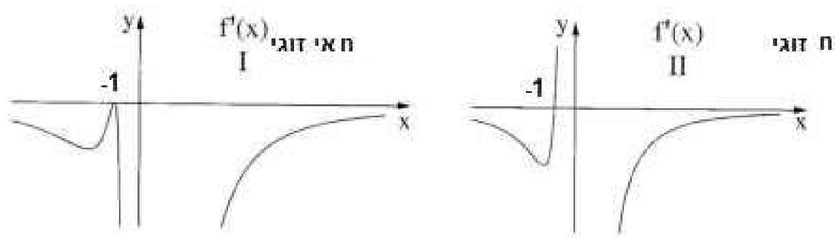
ב. $f'(x)=n(1+\frac{1}{x})^{n-1}(-\frac{1}{x^2})$ **.**

הביטוי $(-\frac{1}{x^2})$ **שלילי לכל** $x\neq 0$ **, ו-** $n>1$ **חיובי.**

כאשר n **אי זוגי, אז** $n-1$ **זוגי, ובהתאם** $(1+\frac{1}{x})^{n-1}$ **חיובי וסימן הנגזרת שלילי, או אפס עבור** $x=-1$ **.**

תשובה: הוכח ש $f'(x)\le 0$ **, כאשר** n **אי זוגי.**

לכן, הגרף השמאלי מתאים לפונקציית הנגזרת עבור n **אי זוגי, והגרף הימני, אם כך, עבור** n **זוגי.**



ג. (1) ל- $f(x)$ **אין נקודות קיצון, כי הנגזרת לא מחליפה סימן, והפונקציה תרד עבור** $x>0$ **או** $x<0$ **.**

תשובה: אין נקודות קיצון.

(2) עבור $x=-1$ **תהיה נקודת פיתול, וגם ב-** x **בו לנגזרת נקודת מינימום תהייה נקודת פיתול.**

הסבר: כאשר הנגזרת $f'(x)$ **עוברת מירידה לעלייה, או מעלייה לירידה,**

אז הנגזרת שלה $f''(x)$ **עוברת משליליות לחיובית, (או להיפך),**

והפונקציה $f(x)$ **מחליפה קעירויות.**

תשובה: שתי נקודות פיתול.

ד. (1) ל- $f(x)$ **נקודת קיצון אחת מינימום, בה** $x=-1$ **,**

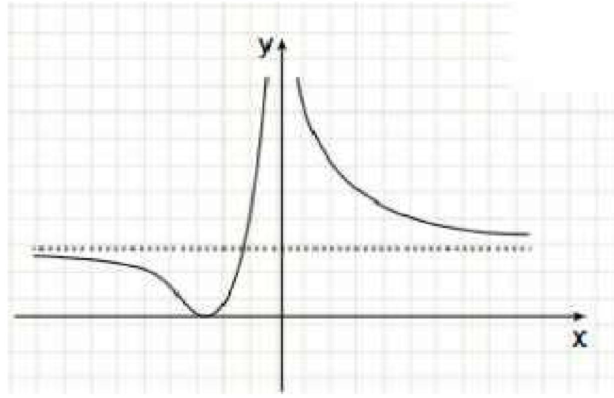
כי הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות והפונקציה מירידה לעלייה.

תשובה: נקודת קיצון אחת.

(2) ב- x **בו לנגזרת נקודת מינימום תהייה נקודת פיתול (הסבר דומה ל ג(2)).**

תשובה: נקודת פיתול אחת.

(3) הסקיצה המתאימה:



ה. נתונה הפונקציה $g(x)=(1+\frac{1}{x})^3$ **(** n **אי זוגי) , והפונקציה** $h(x)=(1+\frac{1}{x})^4$ **(** n **זוגי).**

יש למצוא עבור $x>0$ **את סימן המכפלה** $g''(x)\cdot h''(x)$ **,**

שנובע מסימני הנגזרת השנייה של כל אחת מהפונקציות.

עבור $x>0$ **:** $g'(x)$ **עולה, על פי הציור הנתון ל-** n **אי זוגי, ולכן** $g''(x)$ **חיובית.**

עבור $x>0$ **:** $h'(x)$ **עולה, על פי הציור הנתון ל-** n **זוגי, ולכן** $h''(x)$ **חיובית.**

מכאן שגם $g''(x)\cdot h''(x)$ **חיובי.**

תשובה: סימן המכפלה הוא חיובי.