א. נסמן את מהירות הזרם ב- x (קמ"ש) .

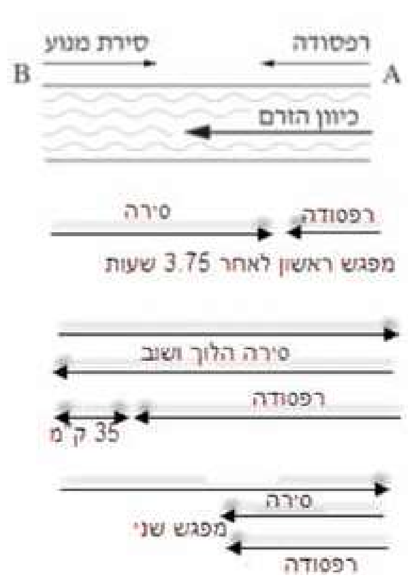
בהתאם מהירות הרפסודה, שנעה עם הזרם, היא x ,

ומהירותה העצמית של סירת המנוע היא $4x$.

כאשר הסירה שטה עם הזרם מהירותה $4x+x=5x$, ונגד הזרם $4x-x=3x$.

		זמן - t שעות	מהירות - v ק"מ לשעה	דרך-מרחק - s ק"מ
מהתחלה עד מפגש ראשון	סירה	3.75	$3x$	$11.25x$
	רפסודה	3.75	x	$3.75x$
מהתחלה עד שהסירה מגיעה בחזרה לעיירה B	סירה מ- B ל- A	5	$3x$	$15x$
	סירה מ- A ל- B	3	$5x$	$15x$
	רפסודה	8	x	$8x$

משתי השורות הראשונות בטבלה, ניתן לראות שסכום
המרחקים שעוברים כלי השיט הוא $15x$,
ולכן זהו המרחק בין שתי העיירות.
בהתאם בשתי השורות הבאות ניתן למצוא את
זמן השיט של הסירה בכל כיוון,
ומכאן את זמן השיט של הרפסודה,
עד שהגיעה למרחק של 35 ק"מ מעיירה B.
לכן, המשוואה המתאימה מהשורה החמישית, היא $8x+35=15x$,
שפתרונה הוא $x=5$.
תשובה: מהירות הזרם היא 5 קמ"ש (זו גם מהירות הרפסודה),
ומהירות סירת המנוע במים עומדים היא 20 קמ"ש.



ב. במשך 5 השעות שסירת המנועה שטה מעיירה B לעיירה A, עברה הרפסודה 25 ק"מ $=5\cdot 5$.

נסמן ב- t (שעות) את הזמן שעבר מרגע יציאת סירת המנוע מעיירה A עד למפגש השני.

מהירות סירת המנוע, עם הזרם, היא 25 קמ"ש $=5x$.

לכן, המשוואה המתאימה היא $5t+25=25t$, שפתרונה הוא $t=1.25$.

מכאן שהזמן שעבר מרגע יציאת הרפסודה מעיירה A ועד למפגש השני הוא 6.25 שעות $=5+1.25$.

תשובה: הזמן שעבר מרגע יציאת הרפסודה מעיירה A

עד שהסירה והרפסודה נפגשו בפעם השנייה הוא 6.25 שעות (שש ורבע שעות).

א. נתונה סדרה a_n המקיימת: $S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}}$.

עבור $n>1$ ניתן לקבל את a_n באמצעות הנוסחה $a_n = S_n - S_{n-1}$.

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$a_n = S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}} - (k - \frac{1}{3^{n-1+1}})$$

$$a_n = S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}} - k + \frac{1}{3^n}$$

$$a_n = \frac{-1+3}{3^{n+1}}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{3^{n+1}}}$$

תשובה: עבור $n>1$ האיבר הכללי הוא $a_n = \frac{2}{3^{n+1}}$.

ב. בסעיף א' הראינו כי עבור $n>1$ האיבר הכללי הוא $a_n = \frac{2}{3^{n+1}}$.

כדי להראות שהסדרה היא הנדסית, נדרוש תחילה שהכלל יתפוס גם עבור $n=1$.

נציב $n=1$ בכלל מצאנו ונקבל: $a_1 = \frac{2}{3^{1+1}} = \frac{2}{9}$.

במקביל $a_1 = S_1 = k - \frac{1}{3^{1+1}} = k - \frac{1}{9}$.

לכן: $k - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$**, ומכאן ש-** $k = \frac{1}{3}$.

נוכיח שהסדרה $a_n = \frac{2}{3^{n+1}}$ (נכון לכל n טבעי) היא סידרה הנדסית.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1+1}}}{\frac{2}{3^{n+1}}} = \frac{2}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{2} = \frac{1}{3}.$$

מכאן שהמנה בין כל שני איברים עוקבים קבועה (לא תלויה ב- n), כאשר $q = \frac{1}{3}$.

תשובה: $k = \frac{1}{3}$ **, מנת הסדרה היא** $q = \frac{1}{3}$.

ג. נתון כי $T = a_2^2 + a_5^2 + a_8^2 + ...$ **.**

נוכיח שהסדרה T_n **היא סידרה הנדסית אין-סופית מתכנסת ונחשב את סכומה.**

$$\frac{a_{n+3}^2}{a_n^2} = \frac{(a_n q^3)^2}{a_n^2} = \frac{a_n^2 q^6}{a_n^2} = q^6 = (\frac{1}{3})^6 = \frac{1}{729}$$

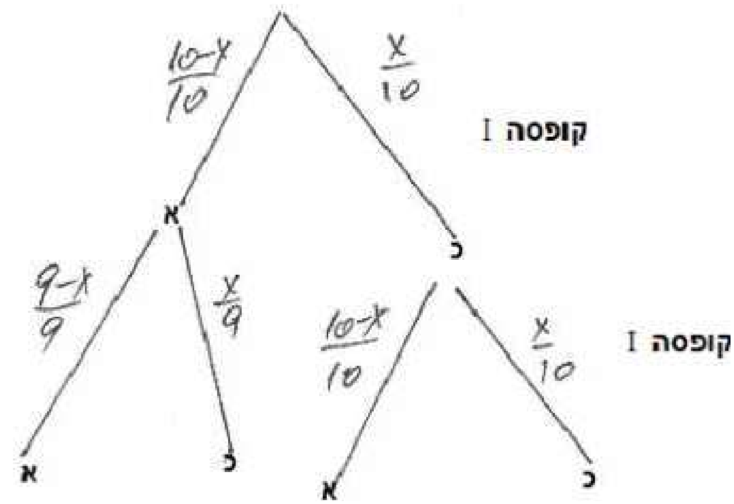
מכאן שהמנה בין כל שני איברים עוקבים קבועה (לא תלויה ב- n**),**

כאשר $q^* = \frac{1}{729}$ **, כלומר המנה היא בין** -1 **ל-** 1 **והסדרה אין-סופית מתכנסת.**

$$T = \frac{a_2^2}{1-q^*} = \frac{(\frac{2}{27})^2}{1-\frac{1}{729}} = \frac{1}{182}$$

תשובה: $T = \frac{1}{182}$

א. שתי ההוצאות הראשונות הן מקופסה I **שבה** x **כדורים כחולים, ו-** $10-x$ **כדורים אדומים,**
באם יוצא כדור כחול מחזירים אותו לקופסה, ואם יוצא כדור אדום מעבירים אותו לקופסה II **.**
נציג עץ הסתברויות מתאים.



נתון כי ההסתברות שלאחר שתי ההוצאות מקופסה I **יועבר כדור אדום אחד בלבד לקופסה** II **היא** $\frac{19}{36}$ **.**

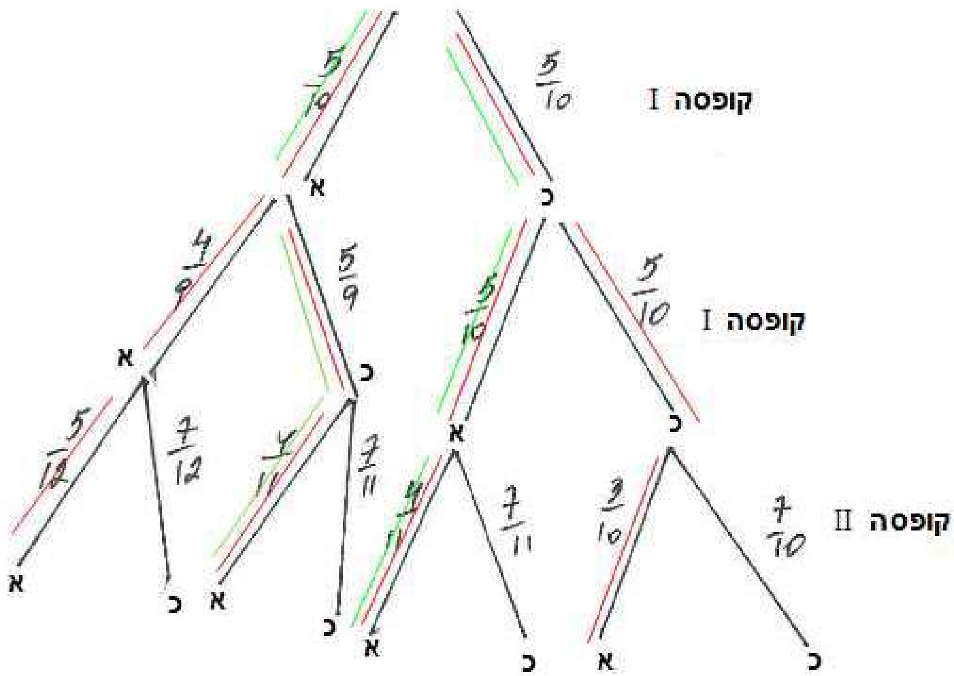
$$\frac{19}{36}=\frac{x}{10}\cdot\frac{10-x}{10}+\frac{10-x}{10}\cdot\frac{x}{9}$$
$$\frac{19}{36}=\frac{x(10-x)}{100}+\frac{x(10-x)}{90}$$
$$\frac{19}{36}=\frac{19x(10-x)}{900}$$
$$25=x(10-x)$$
$$x^2-10x+25=0$$
$$\boxed{x=5}$$

תשובה: מספר הכדורים הכחולים שהיו בקופסה I **לפני ההוצאה הראשונה הוא חמישה.**

ב. אם כך, בקופסה I יש לפני ההוצאה הראשונה 5 כדורים כחולים ו- 5 אדומים.

בקופסה II יש לפני ההוצאה הראשונה 7 כדורים כחולים ו- 3 כדורים אדומים.

נציג עץ הסתברויות חדש, ונשים לב שאם הוצא כדור אדום מקופסה I, הוא מועבר לקופסה II, כך שבקופסה הראשונה יהיה אחד פחות ובשנייה אחד יותר.



נחשב את ההסתברות שהכדור שהוצא מקופסה II הוא אדום (מסלולים מסומנים באדום).

$$P(red\ \ from\ box\ II)=\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{10}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{11}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{11}+\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{12}$$

$$P(red\ \ from\ box\ II)=\frac{4271}{11880}\approx 0.3595$$

תשובה: ההסתברות שהכדור שהוצא מקופסה II הוא אדום היא $\frac{4271}{11880}\approx 0.3595$.

ג. נחשב את ההסתברות שאחרי שהוציאו את הכדור האדום מקופסה II נשארו בה שלושה כדורים אדומים בדיוק (משמע, לפני ההוצאה היו בה ארבעה כדורים אדומים).

אלו המסלולים הירוקים, מתוך המסלולים האדומים.

$$\mathrm{P}(3\ red\ after\ /\ red\ \ from\ box\ II)=\frac{\mathrm{P}(3\ red\ after\cap red\ \ from\ box\ II)}{\mathrm{P}(red\ \ from\ box\ II)}=$$

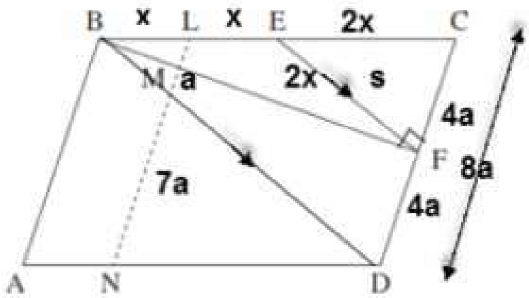
$$\mathrm{P}(3\ red\ after\ /\ red\ \ from\ box\ II)=\frac{\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{11}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{11}}{\frac{4271}{11880}}=$$

$$\mathrm{P}(3\ red\ after\ /\ red\ \ from\ box\ II)=\frac{2280}{4271}\approx 0.5338$$

תשובה: ההסתברות שיישארו בקופסה II שלושה כדורים אדומים,

לאחר הוצאת כדור אדום היא $\frac{2280}{4271}\approx 0.5338$.

4



נתונים

1. $ABCD$ **מקבילית . 2.** $\sphericalangle A < 90°$ **3.** $BE = EC$ **4.** $CF = FD$.

5. $S_{\Delta ECF} = s$

עבור ב: 6. $BL = LE$ **. 6.** $LN \parallel AB$ **. עבור ג: 7.** $BE = EF$

צ"ל: א. S_{ABCD} **ב.** $\frac{LM}{MN}$ **ג. האם** $ABFD$ **בר חסימה במעגל.**

הסבר		טענה	נימוק
4	8	$CF = FD$	נתון
5	9	$S_{\Delta ECF} = s$	נתון
9 ,8	10	$S_{\Delta BCF} = 2s$	התיכון EF מחלק את ΔBCF לשני משולשים שווי שטח
10 ,8	11	$S_{\Delta BCD} = 4s$	התיכון BF מחלק את ΔBCD לשני משולשים שווי שטח
1	12	$ABCD$ מקבילית	נתון
12 ,11	13	$S_{ABCD} = 8s$	האלכסון BD מחלק את המקבילית לשני משולשים (חופפים) שווי שטח
		מ.ש.ל. א	
3	14	$BE = EC = 2x$	נתון וסימון
14 ,6	15	$BL = LE = x$	נתון וחישוב
15 ,14	16	$\frac{BL}{BC} = \frac{1}{4}$	חישוב
6	17	$LN \parallel AB$	נתון
12	18	$DC \parallel AB$	צלעות נגדיות מקבילות במקבילית
18 ,17	19	$LN \parallel DC$	שני ישרים המקבילים לישר שלישי, מקבילים
19 ,16	20	$\frac{LM}{CF} = \frac{BL}{BC} = \frac{1}{4}$	משפט תאלס הרחבה 1
20 ,8	21	$\frac{LM}{CD} = \frac{1}{8}$	חישוב
12	22	$BC \parallel AD$	צלעות נגדיות מקבילות במקבילית
22 ,18	23	$LCDN$ מקבילית	שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות
23	24	$LN = CD$	צלעות נגדיות שוות במקבילית
24 ,21	25	$\frac{LM}{LN} = \frac{1}{8}$	הצבה
25	26	$\frac{LM}{MN} = \frac{1}{7}$	כללי פרופורציה
		מ.ש.ל. ב	

הסבר		טענה	נימוק
7	27	$BE = EF$	נתון
14, 27	28	$BE = EF = EC$	כלל המעבר
28	29	$\measuredangle CFB = 90^\circ$	משפט הפוך לתיכון ליתר
29	30	$\measuredangle DFB = 90^\circ$	זוויות צמודות משלימות ל- 180°
2	31	$\measuredangle A < 90^\circ$	נתון
30, 31	32	ABFD אינו בר חסימה במעגל	זוויות נגדיות לא משלימות ל- 180°
מ.ש.ל. ג			

א. $ABCD$ **טרפז החסום במעגל , ולכן הוא טרפז שווה שוקיים.**

הסבר – ניתן להעביר אלכסון, ולהראות זוויות מתחלפות שוות ובהתאם מיתרים וקשתות שוות.

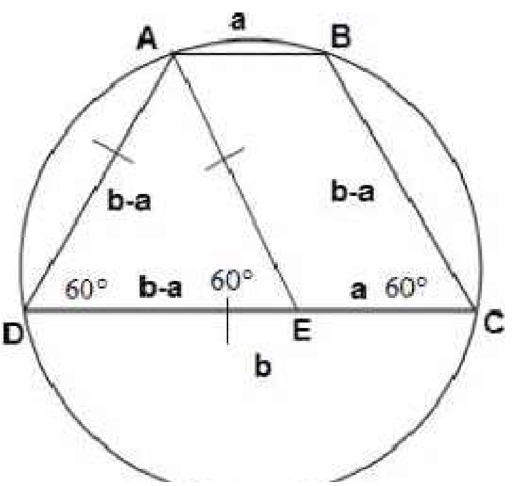
נעביר $AE \parallel BC$ **, ונקבל מקבילית** $AECB$ **מימין (שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות)**

ומשולש שווה צלעות משמאל (כל זוויותיו שוות $60°$ **, כי זוויות בסיס שוות בטרפז שווה שוקיים,**

$\sphericalangle AED = \sphericalangle BCD = 60°$ **, זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים).**

$CE = AB = a$ **, צלעות נגדיות שוות במקבילית,** $DE = b - a$ **ומכאן ש-** $BC = AD = b - a$ **.**

תשובה: $BC = AD = b - a$ **.**

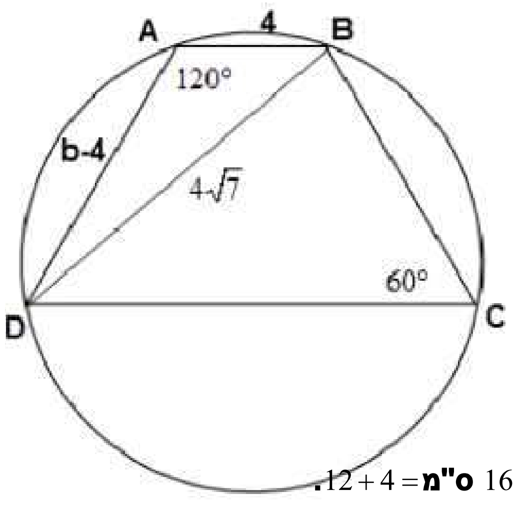


ב. $\underline{\Delta ABD}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

$$\sphericalangle BAD = 180° - 60° = 120°$$

$$(BD)^2 = (AD)^2 + (AB)^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos\sphericalangle BAD$$
$$(4\sqrt{7})^2 = 16^2 + (b-4)^2 - 2\cdot 4\cdot (b-4)\cdot \cos 120°$$
$$112 = 16 + (b-4)^2 + 4(b-4)$$
$$(b-4)^2 + 4(b-4) - 96 = 0$$
$$b-4 = 8 \quad \rightarrow \boxed{b=12}$$
$$b-4 = -12 \quad \rightarrow \cancel{b=-8}$$

תשובה: $b = 12$ **.**



ג. (1) נמצא את רדיוס המעגל החוסם את הטרפז, וגם את ΔABD **.**

$\underline{\Delta ABD}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{BD}{\sin 120°} = 2R$$
$$\frac{4\sqrt{7}}{2\sin 120°} = R$$
$$\boxed{R = 6.11cm}$$

תשובה: $R =$ **ס"מ** 6.11 **.**

(2) סכום אורכי השוקיים 16 **ס"מ** $= 8+8$ **, שווה לסכום הבסיסים** 16 **ס"מ** $= 12+4$ **.**

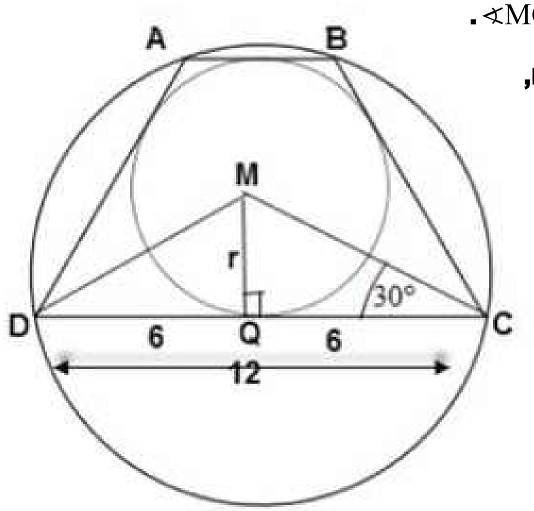
תשובה: ניתן לחסום מעגל בטרפז כי סכום צלעות נגדיות שווה.

(3) מרכז מעגל חסום הוא מפגש חוצי זוויות. $\sphericalangle MCQ = 0.5 \cdot 60° = 30°$ **.**

$\underline{\Delta CMQ}$ **(** C **מרכז המעגל,** Q **נקודת ההשקה,** ΔDMC **שוקיים,**

לכן הגובה CQ **הוא גם תיכון)**

$$\tan 30° = \frac{r}{QC}$$
$$6\tan 30° = r$$
$$\boxed{r = 2\sqrt{3} \approx 3.464cm}$$



תשובה: $r =$ **ס"מ** $2\sqrt{3} \approx 3.464$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=a-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}$ **(** a **פרמטר).**

(1) הפונקציה מוגדרת כאשר המכנה אינו מתאפס.

תשובה: תחום ההגדרה: $x\neq 2$ **.**

(2) נמצא אסימפטוטות המאונכות לצירים.

$x=2$ **מאפס שני מכנים, ולא את המונים, לכן הישר** $x=2$ **אסימפטוטה אנכית.**

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{(x-2)^2}=0$ **, ולכן** $y=a$ **אסימפטוטה אופקית.**

תשובה: $x=2$ **,** $y=a$ **.**

(3) נמצא נקודות קיצון ונקבע את סוגן:

$$f(x)=a-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=+\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{0-2(x-2)\cdot 1}{(x-2)^4}$$

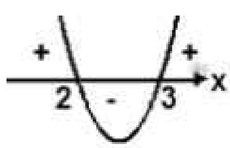
$$f'(x)=\frac{2}{(x-2)^2}-\frac{2(x-2)}{(x-2)^4}$$

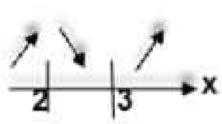
$$f'(x)=\frac{2(x-2)^2-2(x-2)}{(x-2)^4}$$

$$f'(x)=\frac{2(x-2)(x-2-1)}{(x-2)^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2(x-2)(x-3)}{(x-2)^4}}$$

$$0=x-3\quad\to x=3\quad\to y=a-1\quad\to \boxed{(3,a-1)}$$





מכנה הנגזרת חיובי, בתחום ההגדרה.

מונה הנגזרת מיוצג על ידי פרבולה בעלת מינימום,

שמתאפסת עבור $x=2$ **(שאינו בתחום ההגדרה) ו-** $x=3$ **,**

ובהתאם סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה.

תשובה: $(3,a-1)$ **, מינימום.**

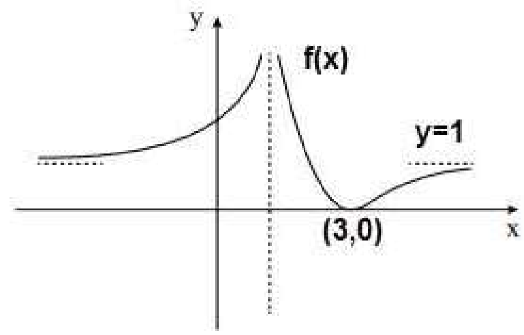
(4) תשובה: עליה: $x>3$ **או** $x<2$ **, ירידה:** $2<x<3$ **.**

ב. נתון כי גרף הפונקציה משיק לציר ה- x **, כלומר בנקודת המינימום** $(3,a)$**, שבה שיפוע המשיק הוא אפס.**

ולכן $a-1=0$ **ו-** $a=1$ **(כי שיעור ה-** y **של נקודת המינימום, שעל ציר ה-** x **, הוא אפס).**

תשובה: $a=1$ **.**

ג. סקיצה מתאימה:



ד. נתון כי גרף הפונקציה $g(x)=|f(x)+k|$ **משיק לאסימפטוטה האופקית של** $f(x)$ **, כלומר ל** $y=1$ **.**

מכאן שהשיפוע של $g(x)=|f(x)+k|$ **בנקודת ההשקה הוא אפס,**

ולכן זה חייב להיות בנקודת המינימום שלה, שהיא $(3,|(0+k)|)=(3,|k|)$ **.**

מכאן ש- $|k|=1$ **ו-** $k=\pm1$ **.**

תשובה: $k=\pm1$ **.**

א. לגרף II **יש נקודת מקסימום ב-** C**, כאשר גרף** I **עובר בנקודה זו מחיוביות לשליליות.**

לכן גרף II **מתאים לפונקציה** $f(x)$ **, העוברת מעלייה לירידה בנקודה זו,**

וגרף I **מתאים לפונקציה** $f'(x)$ **.**

תשובה: גרף II **-** $f(x)$ **, גרף** I **-** $f'(x)$ **.**

ב. $f'(x)=x(x+b)^3$ **(**$b>1$ **פרמטר). ל-** $f(x)$ **יש פיתול ב-** $x=-1$ **ולכן** $f''(-1)=0$ **.**

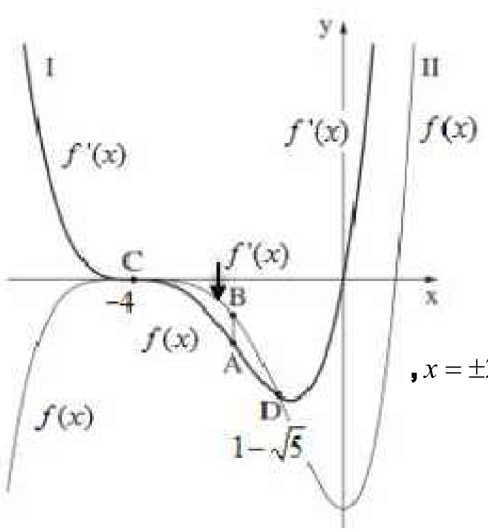
$$f''(x)=(x+b)^3+3x(x+b)^2$$
$$f''(x)=(x+b)^2(4x+b)$$
$$0=(x+b)^2(4x+b)$$
$$0=x+b \quad \to 0=-1+b \quad \to \cancel{b=1} \quad \leftarrow b>1$$
$$0=4x+b \quad \to 0=4(-1)+b \quad \to \boxed{b=4} \quad o.k.$$

תשובה: $b=4$.

ג. הפונקציה שיש למצוא לה מקסימום היא אורך הקטע AB **, בתחום** $-4<x<1-\sqrt{5}$ **.**

כיוון ש- AB **מאונך לציר ה-** x **, הרי ש-** $\mathrm{AB}=y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}=f(x)-f'(x)$ **.**

נמצא מקסימום לפונקציה זו.



$$\mathrm{AB}=f(x)-f'(x)$$
$$(\mathrm{AB})'=f'(x)-f''(x)$$
$$(\mathrm{AB})'=x(x+4)^3-(x+4)^2(4x+4)$$
$$(\mathrm{AB})'=(x+4)^2\left[x(x+4)-(4x+4)\right]$$
$$(\mathrm{AB})'=(x+4)^2(x^2+4x-4x-4)$$
$$\boxed{(\mathrm{AB})'=(x+4)^2(x^2-4)}$$

הכופל השמאלי חיובי בתחום. הכופל הימני מתאפס עבור $x=\pm 2$ **,**

כאשר $x=-2$ **בתחום.**

זו נקודת מקסימום, כי $\mathrm{AB}(-4)=\mathrm{AB}(1-\sqrt{5})=0$ **,**

ושאר ערכי AB **בתחום הינם חיוביים.**

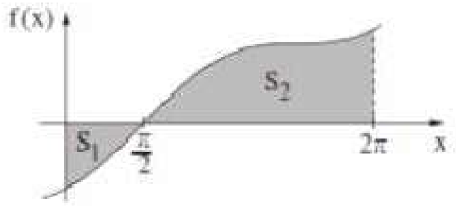
תשובה: $x_{\mathrm{A}}=x_{\mathrm{B}}=-2$ **, עבורם אורך הקטע** AB **הוא מקסימלי.**

א. גודל השטח האפור שבציור הוא $10\pi^2+16$**, כלומר:** $S_1+S_2=10\pi^2+16$ **.**

נתון גם כי $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=8\pi^2$ **.**

כיוון $S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(0-f(x))\,dx$, **מתקבל ש-** $-S_1+S_2=8\pi^2$ **.**

נפתור את מערכת המשוואות:



$$-\begin{cases} S_1+S_2=10\pi^2+16 \\ -S_1+S_2=8\pi^2 \end{cases}$$

$$2S_1=2\pi^2+16$$

$$\boxed{S_1=\pi^2+8}$$

תשובה: $S_1=\pi^2+8$ **.**

ב. נמצא את $F(\frac{\pi}{2})$ **, כאשר נתון:** $F(0)=0$ **.**

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(0-f(x))\,dx$$

$$\pi^2+8=-F(\frac{\pi}{2})+F(0)$$

$$\pi^2+8=-F(\frac{\pi}{2})+0$$

$$\boxed{F(\frac{\pi}{2})=-\pi^2-8}$$

תשובה: $F(\frac{\pi}{2})=-\pi^2-8$.

ג. נמצא את $f(x)$ **, כאשר נתון:** $f'(x)=8\sin x+8$ **ועל פי סעיף א מתקיים** $f(\frac{\pi}{2})=0$ **.**

$$f(x)=\int f'(x)dx$$

$$f(x)=\int(8\sin x+8)\,dx$$

$$f(x)=-8\cos x+8x+c$$

$$f(\frac{\pi}{2})=0 \quad \leftarrow \quad 0=-9\cos(\frac{\pi}{2})+8(\frac{\pi}{2})+c \text{ .}$$

$$0=-9\cdot 0+4\pi+c$$

$$c=-4\pi$$

$$\boxed{f(x)=-8\cos x+8x-4\pi}$$

תשובה: $f(x)=-8\cos x+8x-4\pi$ **.**