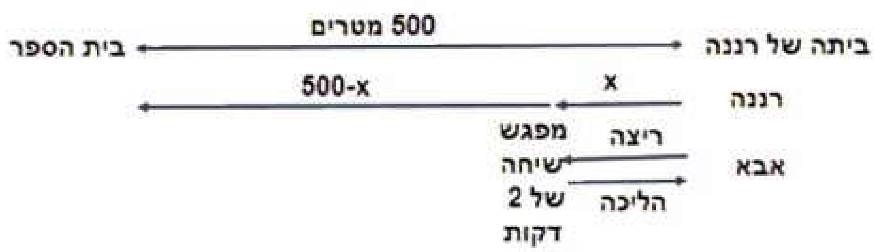
א. נסמן את מהירות הליכתה הקבועה של רננה ב- v **(מטרים לשנייה,** $0 < v < 2.5$ **) .**

נסמן את המרחק עד למפגש, בין רננה לאביה, ב- x **(מטרים,** $0 < x < 500$ **) .**



		זמן (שניות)	מהירות (מטר לשנייה)	דרך-מרחק (מטרים)
מהבית עד למפגש	**רננה**	$\frac{x}{v}$	v	x
	אבא בריצה	$\frac{x}{2.5}$	2.5	x
מהמפגש עד ההגעה ליד הסופי	**רננה לבית ספר**	$\frac{500-x}{v}$	v	$500-x$
	אבא לבית בהליכה	$\frac{x}{1.5}$	1.5	x

עד למפגש, אבא הלך 180 **שניות פחות (** 3 **דקות), לכן, המשוואה המתאימה היא** $\frac{x}{v} = \frac{x}{2.5} + 180$ **.**

הזמן מהמפגש עד הגעה ליעד הסופי (רננה לביה"ס, אבא לבית), היה זהה,

המשוואה המתאימה היא: $\frac{500-x}{v} = \frac{x}{1.5}$ **.**

נפתור את מערכת המשוואות.

$$\begin{cases} \frac{x}{v} = \frac{x}{2.5} + 180 & / \cdot 2.5v \\ \frac{500-x}{v} = \frac{x}{1.5} & / \cdot 1.5v \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2.5x = xv + 450v & \to 2.5x - 450v = xv \\ 750 - 1.5x = xv \end{cases}$$

$$2.5x - 450v = 750 - 1.5x$$

$$4x = 750 + 450v \quad / :4$$

$$\boxed{x = 187.5 + 112.5v}$$

$$2.5(187.5 + 112.5v) = v(187.5 + 112.5v) + 450v$$

$$0 = 112.5v^2 + 356.25v - 468.75$$

$$\boxed{v = 1} \quad o.k. \quad \cancel{v = -4\frac{1}{6}}$$

$$\boxed{x = 300}$$

תשובה: מהירות ההליכה של רננה 1 **מטר לשנייה.**

ב. עד לבית הספר <u>הלכה</u> רננה 500 **שניות, ובנוסף** 120 **שניות בהן התעכבה (** 2 **דקות שיחה עם אבא).**

תשובה: 620 **שניות, או** $10\frac{1}{3}$ **דקות עברו, מן הרגע שרננה יצאה מביתה ועד שהגיעה אל בית הספר.**

א. a_n **היא מוגדרת על ידי כלל הנסיגה** $a_{n+1}=-\frac{c^{n-2}}{a_n}$ **,** $a_1=-\frac{1}{c}$ $(c>0)$**.**

נשים לב שמעריך במונה (בנוסחת הנסיגה) קטן ב- 2 **, ממיקום האיבר שבמכנה, וכן ש-** $a_1<0$ **.**

נראה שסדרת האברים שמקומות האי-זוגיים, ובמקביל זו שבמקומות הזוגיים, היא סדרה הנדסית.

$a_{n+2}=-\frac{c^{n-1}}{a_{n+1}}$ **, נציב עלפי נוסחת הנסיגה במכנה, עם כפל בהופכי.**

$a_{n+2}=-c^{n-1}\cdot\frac{-a^n}{c^{n-2}}$ **, ונקבל ש-** $a_{n+2}=c\cdot a^n$ **, כלומר מנה קבועה בין** a_{n+2} **ל-** a_n **.**

תשובה: סדרת האברים שמקומות האי-זוגיים, או במקומות הזוגיים, היא סדרה הנדסית (ומנתה c **).**

ב. (1) על פי מה שהוכח בסעיף א, נקבל מיידית: $a_3=a_1\cdot c=-\frac{1}{c}\cdot c=-1,\quad a_5=-c,\quad a_7=-c^2$ **.**

על פי נוסחת הנסיגה: $a_2=-\frac{c^{1-2}}{a_1}=-\frac{1}{c}\cdot\frac{-c}{1}\ \rightarrow a_2=1$ **, ומכאן מיידית:** $a_4=c$ **ו-** $a_6=c^2$ **.**

תשובה: $a_1=-\frac{1}{c}$ **,** $a_2=1$ **,** $a_3=-1$ **,** $a_4=c$ **,** $a_5=-c$ **,** $a_6=c^2$ **,** $a_7=-c^2$ **.**

(2) נשים לב, שהחל מהאיבר השני – סכום כל שני איברים עוקבים הוא אפס
(סכומם של איבר במקום זוגי ואיבר שבמקום האי-זוגי העוקב).

תשובה: סכום 7 **האיברים הראשונים הוא** $-\frac{1}{c}$ **.**

(3) $a_3=-a_2$ **, כאשר לסדרה ההנדסית במקומות האי-זוגיים, מנה זהה לסדרת האיברים במקומות הזוגיים.**

לכן סכום האיברים במקומות האי-זוגיים (החל מהמקום השלישי) יהיה שלילי (כי $a_3<0$ **),**

אבל שווה בערכו המוחלט, לסכום האיברים במקומות הזוגיים (החל מהמקום השני).

מכאן שסכום מספר זוגי של איברים עוקבים, החל מהמקום השני, יהיה אפס, ולכן: $S_{2n-1}=a_1=-\frac{1}{c}$ **.**

אפשר, כמובן, גם להציב בנוסחאות הסכום, החל מ- $a_2=1$ **, ו-** $a_3=-1$ **:**

$$\left.\begin{aligned}S_{(n-1)even}&=\frac{a_2(c^{n-1}-1)}{c-1}=\frac{1\cdot(c^{n-1}-1)}{c-1}\\ S_{(n-1)odd}&=\frac{a_3(c^{n-1}-1)}{c-1}=\frac{(-1)\cdot(c^{n-1}-1)}{c-1}\end{aligned}\right\}S_{2n-2}=\frac{1\cdot(c^{n-1}-1)}{c-1}+\frac{(-1)\cdot(c^{n-1}-1)}{c-1}=\frac{(1-1)(c^{n-1}-1)}{c-1}=0$$

ו- $S_{2n-1}=-\frac{1}{c}+0=-\frac{1}{c}$ **.**

תשובה: $S_{2n-1}=-\frac{1}{c}$ **.**

ג. (1) b_n **מוגדרת באופן הזה:** $b_n = -\dfrac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$.

על פי הגדרת a_n **:** $a_{n+1} = -\dfrac{c^{n-2}}{a_n}$ **, נקבל ש-** $a_n \cdot a_{n+1} = -c^{n-2}$ **, ולכן** $b_n = -\dfrac{2}{-c^{n-2}} \quad \to b_n = \dfrac{2}{c^{n-2}}$**.**

מכאן ש- $b_{n+1} = \dfrac{2}{c^{n-1}}$ **, ועל-ידי כפל בהופכי נקבל ש:** $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{2}{c^{n-1}} \cdot \dfrac{c^{n-2}}{2} \quad \to \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{1}{c}$**.**

תשובה: b_n **היא סדרה הנדסית, שמנתה** $\dfrac{1}{c}$**.**

(2) $b_1 = -\dfrac{2}{a_1 \cdot a_2} = -\dfrac{2}{-\frac{1}{c} \cdot 1} = 2c$ **, כלומר האיבר הראשון הוא חיובי.**

על-מנת שהסדרה b_n **תהייה יורדת , נדרש שמנתה תהייה** $0 < q < 1$ **,**

ולכן בגלל שמנתה היא $q = \dfrac{1}{c}$ **, נדרש ש-** $c > 1$ **.**

תשובה: $c > 1$ **הוא תחום הערכים של** c**, שבעבורם** b_n **היא סדרה יורדת.**

(3) נתון שהסדרה האין-סופית b_n **היא סדרה יורדת.**

$$S = \frac{b_1}{1 - q_b} = \frac{2c}{1 - \frac{1}{c}}$$

$$S = \frac{2c}{\frac{c-1}{c}} = \frac{2c^2}{c-1}$$

תשובה: סכום הסדרה האין-סופית b_n **הוא** $\dfrac{2c^2}{c-1}$**.**

א. במבחן 5 **שאלות, כאשר לכל שאלה מוצגות** 4 **תשובות, מהן רק אחת נכונה.**

תלמיד מקבל 20 **נקודות לכל תשובה נכונה.**

שחר ידע שתי תשובות נכונות, ולכן צבר עבורן 40 **נקודות.**

בשאר ארבע השאלות, סימן באקראי תשובה אחת, ולכן $p(true)=\frac{1}{4}$ **.**

(1) כדי לצבור בדיוק 60 **נקודות, על שחר לענות נכון על בדיוק שאלה אחת מתוך השלוש שנותרו.**

זו התפלגות בינומית, כאשר $n=3$, $p(true)=\frac{1}{4}$ **,** $k=1$**.**

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי:

$$P_3(1)=\binom{3}{1}\cdot(\frac{1}{4})^1\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^{3-1}=3\cdot\frac{1}{4}\cdot(\frac{3}{4})^2=\frac{27}{64}$$

תשובה: ההסתברות, ששחר יצבור במבחן בדיוק 60 **נקודות, היא** $\frac{27}{64}$ **.**

(2) שחר יעבור את המבחן אם יענה לפחות אחת משלוש השאלות שנותרו.

$$P_3(at\ least\ one\ answer\ is\ true)=1-P_3(0)=1-(\frac{3}{4})^3=\frac{37}{64}$$

תשובה: ההסתברות, ששחר יעבור את המבחן, היא $\frac{37}{64}$ **.**

ב. דניאל ידע שתי תשובות נכונות, ולכן צבר עבורן 40 **נקודות.**

בשאר השאלות הוא ידע שתשובה אחת אינה נכונה,

ולכן סימן באקראי תשובה אחת, מתוך שלוש האפשריות כנכונות, כאשר $p(true)=\frac{1}{3}$ **.**

כדי לצבור בדיוק 60 **נקודות, על דניאל לענות נכון על בדיוק שאלה אחת מתוך השלוש שנותרו.**

זו התפלגות בינומית, כאשר $n=3$, $p(true)=\frac{1}{3}$ **,** $k=1$**.**

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי:

$$P_3(1)=\binom{3}{1}\cdot(\frac{1}{3})^1\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)^{3-1}=3\cdot\frac{1}{3}\cdot(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$$

תשובה: ההסתברות, שדניאל יצבור במבחן בדיוק 60 **נקודות, היא** $\frac{4}{9}$ **.**

ג. הדס ידעה שלוש תשובות נכונות, ולכן צברה עבורן 60 נקודות.

בשתי השאלות שנותרו היא ידעה בוודאות k תשובות נכונות,

ולכן סמנה באקראי תשובה אחת מן התשובות הנכונות. נסמן $p(true)=p$, לכן $p(false)=1-p$.

ידוע שההסתברות שהדס תצבור בדיוק 60 נקודות, שווה להסתברות שהיא תצבור 100 נקודות במבחן.

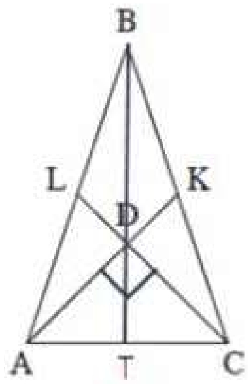
$$\mathrm{P}_2(2)=\mathrm{P}_2(0)$$
$$p^2=(1-p)^2$$
$$p=1-p$$
$$p=\frac{1}{2}$$

מכאן שהדס סימנה באקראי אחת משתי תשובות אפשריות,

כי ההסתברות היא תמיד אחת חלקי "תשובות אפשריות כנכונות".

ולכן $k=4-2=2$

תשובה: $k=2$.



<u>נתונים</u>

1. ΔABC **שווה שוקיים (** $AB=BC$ **). 2.** AK, CL **תיכונים לשוקיים 3.** $AK \perp CL$ **.**

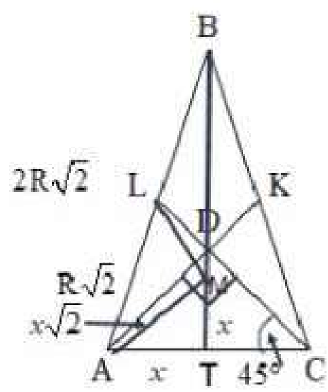
עבור ג. 4. M **מרכז מעגל חוסם** $ALKC$ **.**

צ"ל: א. $BD=AC$ **ב.** $\frac{S_{BLDK}}{S_{\Delta ABC}}$

ג. (1) $\sphericalangle AML=90^\circ$ **(2)** $\frac{AM}{AD}$ **.**

הסבר		טענה	נימוק
1	**5**	ΔABC **שווה שוקיים** ($AB=BC$).	**נתון**
2	**6**	AK, CL **תיכונים לשוקיים**	**נתון**
6	**7**	BDT **תיכון לבסיס**	**יוצא מקדקוד ועובר במפגש תיכונים**
6, 7	**8**	$TD=\frac{BD}{2}$	**תיכונים חותכים זה את זה ביחס 2:1 מקדקוד**
3	**9**	$AK \perp CL$	**נתון**
7, 9	**10**	$TD=\frac{AC}{2}$	**תיכון ליתר שווה למחצית היתר** ΔADC
8, 10	**11**	$BD=AC$	**חישוב**
מ.ש.ל. א			
6, 7	**12**	**שטחי ששת המשולשים הקטנים שווים, נסמן שטח כ"א ב-** S	**התיכונים (** DL, DK, DT **) מחלקים את שלושת המשולשים למשולשים שווי שטח**
12	**13**	$S_{\Delta ABC}=6S$, $S_{BLDK}=2S$	**סכום שטחים**
12, 13	**14**	$\frac{S_{BLDK}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{1}{3}$	**חישוב**
מ.ש.ל. ב			
4	**15**	M **מרכז מעגל חוסם** $ALKC$	**נתון**
5, 7	**16**	$\sphericalangle ATD=\sphericalangle CTD=90^\circ$	**התיכון לבסיס מתלכד עם הגובה במש"ש**
9, 16	**17**	$\sphericalangle LCA=45^\circ$	**זוויות בסיס שוות במש"ש ישר זווית** ΔDTC
15, 17	**18**	$\sphericalangle AML=90^\circ$	**זווית מרכזית שווה לכפליים הזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת** $\overset{\frown}{AL}$
מ.ש.ל ג (1)			

הסבר		טענה	נימוק
7, 18	19	M נמצאת על הקטע TD *	אנך אמצעי למיתר עובר במרכז המעגל
8	20	$AT = TD = x$	סימון
21	22	$AD = x\sqrt{2}$	משפט פיתגורס ΔADT
15	23	$ML = MA = R$	רדיוסים שווים במעגל וסימון
		מ.ש.ל. ב	
18, 23	24	$AL = R\sqrt{2}$	משפט פיתגורס ΔAML
6, 24	25	$AB = 2R\sqrt{2}$	חישוב
6, 7, 20	26	$BT = 3x$	תיכונים חותכים זה את זה ביחס 2:1 מקדקוד
16, 20, 25, 26	27	$(2R\sqrt{2})^2 = x^2 + (3x)^2$ $8R^2 = 10x^2$ $AM = R = x\frac{\sqrt{5}}{2}$	משפט פיתגורס ΔADT
22, 27	28	$\frac{AM}{AD} = \frac{x\frac{\sqrt{5}}{2}}{x\sqrt{2}}$	חישוב
28	29	$\frac{AM}{AD} = \frac{\sqrt{10}}{4} \sim 0.791$	חישוב
		מ.ש.ל. ג	



*** הערה: נדרש הסבר למיקום M על הקטע TD, ולא בהמשכו.**

בקצרה, $\measuredangle MLA = \measuredangle MAL = 45^\circ$, כי זוויות בבסיס שוות זו לזו במש"ש ישר זווית,

וב- ΔLDA , ישר הזווית - $\measuredangle DLA > 45^\circ$, כי היא מול הניצב הארוך במשולש זה.

א. נסמן: R רדיוס המעגל החוסם את ΔABC.

$\sphericalangle E=\sphericalangle C=2\beta$ **,** $\sphericalangle EAC=\sphericalangle EBC=\beta$ **(זוויות היקפיות שוות, הנשענות על אותה קשת)**

על פי משפט הסינוסים:

<u>ΔABC</u>

$$\frac{AB}{\sin 2\beta}=2R \quad\rightarrow \boxed{AB=2R\sin 2\beta}$$

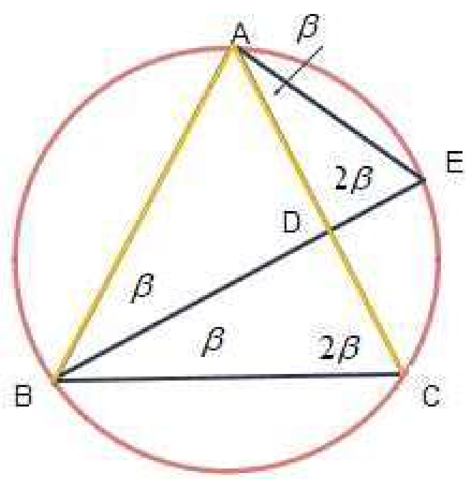
$$S_{\Delta ABC}=\frac{(2R\sin 2\beta)^2\cdot\sin(180^\circ-4\beta)}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=2R^2\sin^2 2\beta\sin 4\beta}$$

או ישירות

$$S_{\Delta ABC}=2R^2\sin 2\beta\cdot\sin 2\beta\cdot\sin(180^\circ-4\beta)$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=2R^2\sin^2 2\beta\sin 4\beta}$$



על פי משפט הסינוסים:

<u>ΔABE</u>

$$\frac{AE}{\sin\beta}=2R \quad\rightarrow \boxed{AE=2R\sin\beta}$$

$$S_{\Delta ADE}=\frac{(2R\sin\beta)^2\cdot\sin\beta\cdot\sin 2\beta}{2\sin(180^\circ-3\beta)}$$

$$\boxed{S_{\Delta ADE}=\frac{2R^2\sin^3\beta\cdot\sin 2\beta}{\sin 3\beta}}$$

נחלק את שתי המשוואות, על-ידי כפל בהופכי.

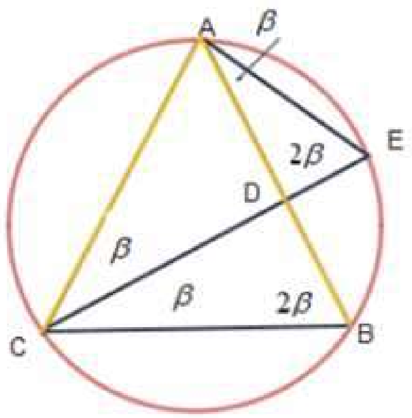
$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}=2R^2\sin^2 2\beta\cdot\sin 4\beta\cdot\frac{\sin 3\beta}{2R^2\sin^3\beta\cdot\sin 2\beta}$$

$$\boxed{\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}=\frac{\sin 2\beta\cdot\sin 3\beta\cdot\sin 4\beta}{\sin^3\beta}}$$

תשובה: $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}=\frac{\sin 2\beta\cdot\sin 3\beta\cdot\sin 4\beta}{\sin^3\beta}$.

ב. נתון $BE=R$

$\underline{\Delta ABE}$ **על פי משפט הסינוסים.**



$$\frac{BE}{\sin(180^\circ-3\beta)}=2R$$

$$\frac{R}{2R}=\sin 3\beta$$

$$3\beta=30^\circ+360^\circ k \quad 3\beta=150^\circ+360^\circ k$$

$$\boxed{\beta=10^\circ} \quad \cancel{\beta=50^\circ}$$

האפשרות השנייה נפסלה, כי מתקבלות זוויות בסיס קהות

ב- ΔABC **שווה השוקיים.**

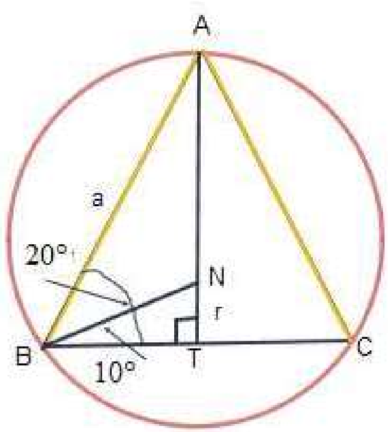
$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}=\frac{\sin 20^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 40}{\sin^3 10^\circ}$$

$$\boxed{\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}=20.99}$$

תשובה: $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}=20.99$**.**

ג. מרכז מעגל חסום הוא מפגש חוצי זוויות, ולכן נמצא על חוצה זווית הראש של ΔABC **שווה השוקיים.**

נתון $AB=a$.



$\underline{\Delta ABT}$

$$\cos 20^\circ=\frac{BT}{AB}$$

$$\boxed{a\cos 20^\circ=BT}$$

$\underline{\Delta BNT}$

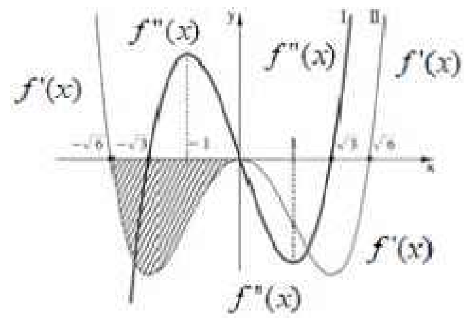
$$\tan 10^\circ=\frac{NT(r)}{BT}$$

$$a\cos 20^\circ \tan 10^\circ$$

$$\boxed{r=0.166a}$$

תשובה: רדיוס המעגל החסום ב- ΔABC **הוא** $0.166a$**.**

א. נשים לב לנקודות החיתוך עם ציר ה- x.



כאשר גרף של נגזרת ($f''(x)$ **) משנה סימן, אז הפונקציה הקדומה (** $f'(x)$ **) מחליפה תחומי עלייה וירידה.**

גרף I **מתאים לפונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה** $f(x)$ **, וגרף** II **לפונקציית הנגזרת הראשונה.**

תחומי החיוביות של גרף I **-** $-\sqrt{3} < x < 0$ **,** $x < \sqrt{3}$ **, תואמים את תחומי העלייה של גרף** II **.**

תחומי השליליות של גרף I **-** $x < -\sqrt{3}$ **,** $0 < x < \sqrt{3}$ **, תואמים את תחומי הירידה של גרף** II **.**

תשובה: גרף I **-** $f''(x)$ **, גרף** II **-** $f'(x)$ **.**

ב. (1) בצורה דומה, כאשר $f'(x)$ **משנה סימן, אז** $f(x)$ **מחליפה תחומי עלייה וירידה.**

עבור $x = -\sqrt{6}$ **,** $f'(x)$ **עוברת מחיוביות לשליליות, ו-** $f(x)$ **מעלייה לירידה. לכן,** $x = -\sqrt{6}$ **מקסימום.**

עבור $x = \sqrt{6}$ **,** $f'(x)$ **עוברת משליליות לחיוביות, ו-** $f(x)$ **מירידה לעלייה. לכן,** $x = \sqrt{6}$ **מינימום.**

תשובה: ל- $f(x)$ **יש שתי נקודות קיצון פנימיות, בתחום המתואר בגרף.**

(2) כאשר $f''(x)$ **משנה סימן, אז** $f(x)$ **מחליפה סוגי קעירויות, ויש נקודת פיתול.**

עבור $x = \sqrt{3}$ **,** $x = 0$ **,** $x = -\sqrt{3}$ **,** $f''(x)$ **משנה סימן, ולכן אלו שיעורי ה-** x **של נקודות פיתול.**

תשובה: ל- $f(x)$ **יש שלוש נקודות פיתול, בתחום המתואר בגרף.**

ג. שיפוע המשיק הוא מינימלי, כאשר ערך פונקציית השיפוע הוא הנמוך ביותר.

ערכי שיפוע המשיק ל- $f'(x)$ **הם ערכי** $f''(x)$ **.**

המינימום המוחלט של $f''(x)$ **, בתחום** $-\sqrt{3} \le x < \sqrt{3}$ **, מתקבל בנקודה שבה** $x = 1$ **.**

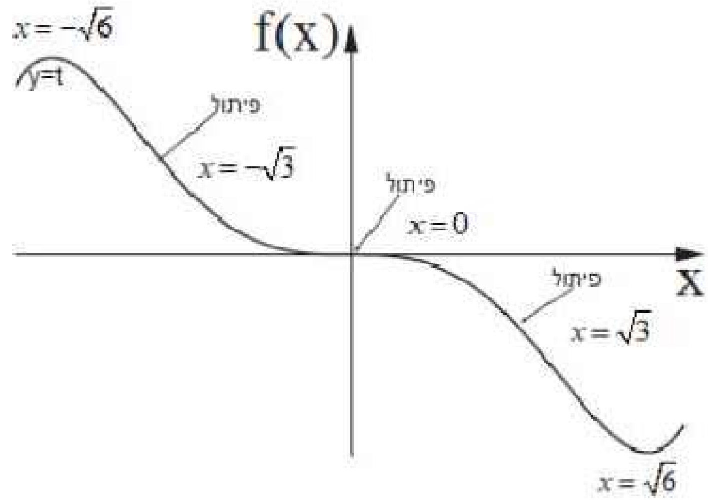
תשובה: עבור $x = 1$ **שיפוע המשיק לפונקציית הנגזרת** $f'(x)$ **הוא מינימלי.**

ד. נשים לב, בציור הסקיצה, שהפונקציה רציפה ואי-זוגית, ולכן עוברת בראשית הצירים.

כמו-כן, בראשית, שיפוע המשיק $f'(x)=0$ **, ולכן בנקודת הפיתול ציר ה-** x **הוא המשיק.**

$f(x)$ **קעורה כלפי מעלה** $\cup$ **כאשר** $f''(x)$ **חיובי, עבור** $x>\sqrt{3}$ **, או** $-\sqrt{3}<x<0$ **.**

$f(x)$ **קעורה כלפי מטה** $\cap$ **כאשר** $f''(x)$ **שלילי, עבור** $0<x<\sqrt{3}$ **, או** $x<-\sqrt{3}$ **.**



ה. נתון $f(-\sqrt{3})=t$ **, (ערך הפונקציה בנקודת המקסימום שלה).**

נמצא את השטח המוגבל על ידי גרף II **-** $f'(x)$ **, השטח המקווקו שבציור.**

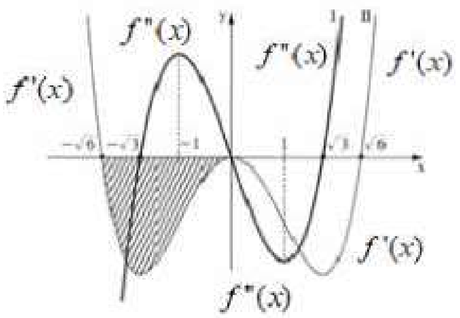
$$S=\int_{-\sqrt{6}}^{0}(0-f'(x))\,dx$$

$$S=-f(x)\Big]_{-\sqrt{6}}^{0}$$

$$S=f(0)-(-f(-\sqrt{6}))$$

$$S=0-(-t)$$

$$\boxed{S=t}$$



תשובה: השטח המקווקו הוא t **.**

ו. נתון: קיימים a **,** b **, ו-** c **ממשיים, כך ש-** $f(x)=ax^5+bx^3+c$ **.**

$f(x)=ax^5+bx^3+c$ **עוברת בראשית, ולכן** $c=0$ **.**

בהתאם: $f(x)=ax^5+bx^3$ **, ולכן** $f'(x)=5ax^4+3bx^2$ **.**

נציב, למשל, $f'(\sqrt{6})=0$ **ונקבל:**

$$0=5a\sqrt{6}^4+3b\sqrt{6}^2$$

$$0=180a+18b$$

$$\boxed{\frac{a}{b}=-\frac{1}{10}}$$

תשובה: $c=0$ **,** $\frac{a}{b}=-\frac{1}{10}$ **.**

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin(\frac{\pi}{x})$ **.**

תחום ההגדרה: $x\neq 0$ **.**

לסעיפים ב-ה: התחום הנתון $x\geq\frac{2}{7}$ **.**

ב. בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $f(x)=0$ **.**

$$\sin(\frac{\pi}{x})=0$$

$$\frac{\pi}{x}=\pi k \quad /:\pi$$

$$x=\frac{1}{k}$$

נזכור ש- k **הוא שלם (חיובי/שלילי, ובמקרה זה לא יכול להיות** 0 **) ו-** $x\geq\frac{2}{7}=0.286$ **(לכן** $k>0, natural$ **).**

$k=4$	$k=3$	$k=2$	$k=1$	k
$x=\frac{1}{4}=0.25<0.286$	$x=\frac{1}{3}$	$x=\frac{1}{2}$	$x=1$	$x=\frac{1}{k}$

תשובה: $(1,0)$ **,** $(\frac{1}{2},0)$ **,** $(\frac{1}{3},0)$ **.**

ב. בנקודת הקיצון מתקיים $f'(x)=0$.

נקודת קצה $(\frac{2}{7},-1)$.

$$f'(x)=-\frac{\pi}{x^2}\cos(\frac{\pi}{x})$$

$$\cos(\frac{\pi}{x})=0$$

$$\frac{\pi}{x}=\frac{\pi}{2}+\pi k \quad /:\pi$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}+k \quad /\cdot 2x$$

$$2=x+2kx$$

$$2=x(1+2k)$$

$$\boxed{x=\frac{2}{1+2k}}$$

נשים ל, שכאשר $\cos(\frac{\pi}{x})=0$ **מתקיים** $\sin(\frac{\pi}{x})=\pm 1$ **(דבר שיקל על ההצבה)**

הפעם, נציב $k\geq 0$**. (עבור** $k<0$ **נצא מהתחום של** $x\geq\frac{2}{7}$**.)**

k	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$x=\frac{2}{1+2k}$	$x=\frac{2}{1+2\cdot 0}=2$	$x=\frac{2}{1+2\cdot 1}=\frac{2}{3}$	$x=\frac{2}{1+2\cdot 2}=\frac{2}{5}$	$x=\frac{2}{1+2\cdot 3}=\frac{2}{7}$
$\sin(\frac{\pi}{x})$	1	-1	1	-1
מסקנה	**מקסימום**	**מינימום**	**מקסימום**	**מינימום קצה**

הנקודה $(2,1)$ **היא מקסימום, כי עבור** $x>2$ **ערכי הפונקציה הולכים וקטנים. לדוגמה** $f(3)=\sin(\frac{\pi}{3})=0.5$.

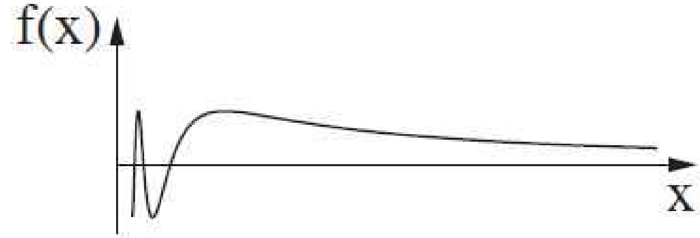
תשובה: $(2,1)$ **מקסימום,** $(\frac{2}{3},-1)$ **מינימום,** $(\frac{2}{5},1)$ **מקסימום,** $(\frac{2}{7},-1)$ **מינימום.**

ד. כאמור, עבור $x>2$ **ערכי הפונקציה הולכים וקטנים.**

$\frac{\pi}{x}$ **נשאר חיובי, ולכן** $\sin(\frac{\pi}{x})\to 0$ **, אולם לא מתאפס לעולם.**

תשובה: האסימפטוטה האופקית היא $y=0$.

ה. סקיצה מתאימה עבור $x \ge \frac{2}{7}$.



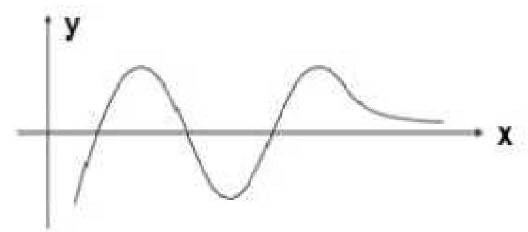
הערה לציור – קבלנו שעבור $x = \frac{2}{7}$ הנגזרת מתאפסת.

בציור, הממוחשב, לא רואים שהנגזרת בקצה מתאפסת,

כי המטרה הייתה להראות את האסימפטוטה האופקית , מימין.

וקנה מידה בציור לא איפשר להראות, במקביל, ששיפוע המשיק ב- $x = \frac{2}{7}$ הוא אפס.

ציור אפשרי נוסף



ו. ככל שמתקרבים ל- $x = 0$, המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וקטן.

נשים לב ששיעורי הנקודות הן: $...\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1$.

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)} \to 0$$

תשובה: טענה i נכונה.

א. שתיים מצלעות המלבן מונחות על הצירים, ושתיים מקבילות לצירים ברביע הראשון.

נתון $AB = a$ **, ושטח המלבן הוא** 4 **.**

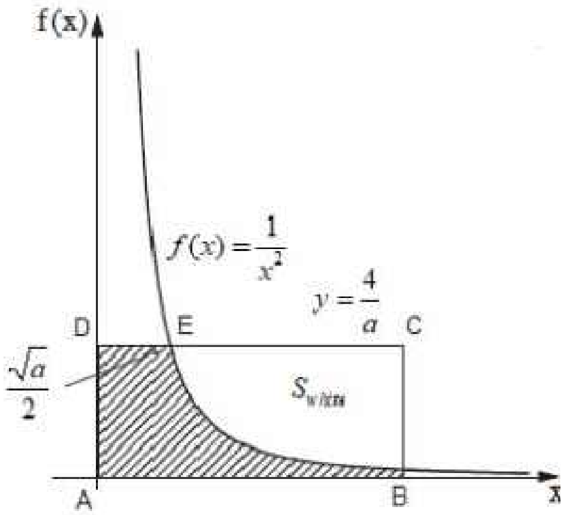
$AD = \frac{4}{a}$ **, ובהתאם משוואת** CD **היא** $y = \frac{4}{a}$ **.**

למציאת שיעורי הנקודה E **, נציב** $y = \frac{4}{a}$ **במשוואת הפונקציה** $f(x) = \frac{1}{x^2}$ **.**

$$\frac{4}{a} = \frac{1}{x^2}$$

$$x^2 = \frac{a}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{a}}{2} \quad \leftarrow x_E > 0$$



נחשב תחילה את גודל השטח הלבן.

$$S_{white} = \int_{\frac{\sqrt{a}}{2}}^{a} \left(\frac{4}{a} - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$S_{white} = \left.\frac{4}{a}x + \frac{1}{x}\right]_{\frac{\sqrt{a}}{2}}^{a}$$

$$x = a: \quad \frac{4}{a} \cdot a + \frac{1}{a} = 4 + \frac{1}{a}$$

$$x = \frac{\sqrt{a}}{2}: \quad \frac{4}{a} \cdot \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{1}{\frac{\sqrt{a}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{4}{\sqrt{a}}$$

$$\boxed{S_{white} = 4 + \frac{1}{a} - \frac{4}{\sqrt{a}}}$$

$$S_{passim} = 4 - \left(4 + \frac{1}{a} - \frac{4}{\sqrt{a}}\right)$$

$$\boxed{S_{passim} = \frac{4}{\sqrt{a}} - \frac{1}{a}}$$

תשובה: השטח המקווקו הוא $S_{passim} = \frac{4}{\sqrt{a}} - \frac{1}{a}$ **.**

ב. הפונקציה שיש להביא ל*מינימום* היא $S_{passim}=\frac{4}{\sqrt{a}}-\frac{1}{a}$**.**

נתון $a\ge\frac{1}{4}$ **.**

פתרון בקצה: $S(0.25)=\frac{4}{\sqrt{0.25}}-\frac{1}{0.25}=4$ **.**

$$S_{passim}=\frac{4}{\sqrt{a}}-\frac{1}{a}$$

$$S'=\frac{-\frac{4}{2\sqrt{a}}}{a}-\frac{-1}{a^2}$$

$$S'=\frac{-2}{a\sqrt{a}}+\frac{1}{a^2}$$

$$\boxed{S'=\frac{-2\sqrt{a}+1}{a^2}}$$

$$-2\sqrt{a}+1=0$$

$$\sqrt{a}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{a=\frac{1}{4}}$$

פתרון בתחום: $S(1)=\frac{4}{\sqrt{1}}-\frac{1}{1}=3$ **.**

לכן $a=\frac{1}{4}$ **מקסימום.**

תשובה: $a=\frac{1}{4}$ **, עבורו השטח שמצאנו בסעיף א הוא מקסימלי.**