א. נסמן ב- x את כמות העוגות שמכונה I מכינה בדקה.

נסמן ב- y את כמות העוגות שמכונה II מכינה בדקה.

נסמן ב- t את הזמן, הזהה, בדקות ששתי המכונות עבדו ביום ראשון.

	מכונה	זמן (דקות)	כמות לדקה (עוגות)	סה"כ (עוגות)
יום ראשון	I	t	x	tx
	II	t	y	ty
יום שני	I	$\frac{ty}{x}$	x	ty
	II	$\frac{tx}{y}$	y	tx

ביום ראשון מכונה I הכינה 80 עוגות יותר ממכונה II, לכן: $tx = ty + 80$

זמן העבודה של מכונה II ביום שני היה גדול פי $\frac{25}{9}$

מזמן העבודה של מכונה I ביום שני, לכן: $\frac{25}{9}\cdot\frac{ty}{x} = \frac{tx}{y}$

נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} (1) \quad tx = ty + 80 \\ (2) \quad \frac{25}{9}\cdot\frac{ty}{x} = \frac{tx}{y} \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{25}{9}\cdot\frac{ty}{x} = \frac{tx}{y} \quad / : t \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{25y}{9x} = \frac{x}{y} \quad \to \quad \Leftrightarrow 25y^2 = 9x^2 \quad / \sqrt{\ } \quad x, y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{5}x \quad \to \quad \Leftrightarrow \boxed{y = 0.6x}$$

$$(1) \quad tx = ty + 80$$

$$\Leftrightarrow tx = t\cdot 0.6x + 80 \quad \to \quad \Leftrightarrow 0.4x = 80$$

$$\Leftrightarrow \boxed{xt = 200}$$

לכן, מספר העוגות שהכינה מכונה I ביום הראשון הוא 200,

ומספר העוגות שהכינה מכונה II הוא 120.

תשובה: שתי המכונות הכינו ביחד, ביום ראשון, 320 עוגות.

ב. אם היחס בין ההספק של מכונה I להספק של מכונה II הוא $5:3$,

אז היחס בין הזמנים הדרושים להכנת עוגייה אחת הוא $3:5$.

תשובה: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{5}$

ג. (1) בפרק זמן מסוים מכונה I **ייצרה בדיוק** 47 **עוגות.**

מכונה II **, באותו הזמן, ייצרה בהתאם ליחס ההספקים:** $\frac{3}{5}\cdot 47=28.2$ **עוגות, כלומר** 28 **עוגות שלמות.**

תשובה: מכונה II **ייצרה, בפרק הזמן הזה,** 28 **עוגות שלמות.**

(2) אם שתי המכונות ייצרו יחד 26 **עוגות שלמות,**

אז מכונה II **יצרה בהתאם ליחס ההספקים:** $\frac{3}{8}\cdot 26=9.75$ **עוגות,**

וזה לא תואם לנתון שכל אחת מהמכונות ייצרה מספר שלם של עוגות.

תשובה: לא ייתכן שבפרק הזמן הזה שתי המכונות ייצרו 26 **עוגות.**

א. a_n **היא סדרה הנדסית אין-סופית שהמנה שלה היא** q **.**

נשים לב שלא נאמר שהסדרה מתכנסת, או שסכומה קבוע, ולכן לא ניתן לומר $-1 < q < 1$ **,**

למעט הנתון ש- $|q| \neq 1$**.**

נתון $a_3 \cdot a_7 = 1$ **.**

$$a_1 q^2 \cdot a_1 q^6 = 1$$
$$a_1^2 q^8 = 1$$
$$(a_1 q^4)^2 = 1$$
$$(a_5)^2 = 1$$
$$\boxed{a_5 = 1 \, , \, a_5 = -1}$$

תשובה: $a_5 = 1$ **, או** $a_5 = -1$ **.**

ב. נתון $a_5 > 0$ **.**

(1) $a_1 q^4 = 1$ **.**

$$\boxed{a_1 = \frac{1}{q^4}}$$

תשובה: $a_1 = \frac{1}{q^4}$ **.**

(2) נבדוק האם קיים $a_n = \frac{1}{a_1}$ **,** n **טבעי, בסדרה הנתונה.**

$$a_1 q^{n-1} = \frac{1}{a_1}$$
$$a_1^2 q^{n-1} = 1$$
$$(\frac{1}{q^4})^2 q^{n-1} = 1$$
$$\frac{1}{q^8} q^{n-1} = 1$$
$$q^{n-1-8} = q^0$$
$$n - 9 = 0$$
$$\boxed{n = 9}$$

<u>פתרון חלופי</u>

נדרש , $a_n \cdot a_1 = 1$ **. מכפלת שני מספרים היא** 1 **, כאשר אלו שני מספרים הופכיים.**

מכאן שאם $a_1 = \frac{1}{q^4}$ **, אז** $a_n = q^4$ **, ולכן** $a_n = 1q^4$ **, ומכאן** $a_n = a_5 q^4$ **, ולסיום** $a_n = a_9$ **.**

תשובה: קיים, $n = 9$ **.**

(3) נבדוק האם קיים $a_n = \frac{1}{a_{13}}$ **,** n **טבעי, בסדרה הנתונה.**

$$a_1 q^{n-1} = \frac{1}{a_1 q^{12}}$$
$$a_1^2 q^{12} q^{n-1} = 1$$
$$\frac{1}{q^8} q^{12+n-1} = 1$$
$$q^{11+n-8} = q^0$$
$$3+n=0$$
$$\boxed{\cancel{n=-3}} \leftarrow n \ natural$$

<u>פתרון חלופי</u>

מכיוון ש- $a_{13} = a_9 q^4$, **אז לא יהיה לו מספר הופכי בסדרה,**

כי אם a_9 **הוא ההופכי ל-** a_1 **, אז ההופכי ל-** a_{13} **יהיה, לכאורה, איבר שנמצא** 4 **מקומות בסדרה לפני** a_1 **.**

תשובה: לא קיים.

ג. (1) נרשום את שבעת האיברים הראשונים בסדרה, פשוט על פי הכפלה פי q **, במעבר מאיבר לאיבר.**

תשובה: $a_1 = \frac{1}{q^4}\ ,\ a_2 = \frac{1}{q^3}\ ,\ a_3 = \frac{1}{q^2}\ ,\ a_4 = \frac{1}{q}\ ,\ a_5 = 1\ ,\ a_6 = q\ ,\ a_7 = q^2$ **.**

(2) נתון $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k = 1$ **.**

ראינו ש- $a_1 \cdot a_9 = 1$ **.**

באותה דרך, $a_1 q \cdot \frac{a_9}{q} = 1 \quad \rightarrow a_2 \cdot a_8 = 1$ **, ולכן גם** $a_3 \cdot a_7 = 1$ **, ו-** $a_4 \cdot a_6 = 1$ **.**

וכמובן שידוע ש- $a_5 = 1$ **.**

מכאן ש- $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_9 = 1$ **.**

$k=9$ **הוא הערך האפשרי היחיד של** k **,**

כי עבור כל $k>9$ **לא יהיה מספר הופכי ל-** a_k **.**

תשובה: $k=9$ **.**

א. בכל סיבוב מנצחת אחת מהבנות, גלי או נטע (אין תיקו בסיבוב אחד של המשחק).

$$p(Neta\ will\ win)=\frac{1}{3}\quad\rightarrow p(Gali\ will\ win)=\frac{2}{3}$$ **.**

(1) נטע ניצחה במשחק כולו, אם ניצחה לפחות בשלושה סיבובים – כלומר בשלושה או בארבעה סיבובים.

זו התפלגות בינומית, כאשר $n=4\ ,\ p=\frac{1}{3}$ **.**

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי:

$$p(Neta\ won\ the\ match)=\mathrm{P}_4(3)+\mathrm{P}_4(4)=\binom{4}{3}\cdot(\frac{1}{3})^3\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)^{4-3}+(\frac{1}{3})^4=4\cdot(\frac{1}{3})^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1+(\frac{1}{3})^4=\frac{1}{9}$$

תשובה: ההסתברות, שנטע ניצחה במשחק כולו, היא $\frac{1}{9}$ **.**

(2) תוצאת תיקו, במשחק כולו, תתקבל אם נטע ניצחה בדיוק בשני משחקים.

$$p(tie)=\mathrm{P}_4(2)=\binom{4}{2}\cdot(\frac{1}{3})^2\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)^{4-2}=6\cdot(\frac{1}{3})^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$$

תשובה: ההסתברות, לתוצאת תיקו במשחק כולו, היא $\frac{8}{27}$ **.**

ב. ביום השני סוכם שאם תוצאת 4 **סיבובים תהייה תיקו, אז ישחקו עוד** 3 **סיבובים.**

(1) נטע תנצח במשחק כולו, בשני מצבים.

אם ניצחה במשחק הראשון (ואז לא יהיה משחק שני),

או שניצחה במשחק השני לאחר תיקו במשחק הראשון.

נחשב תחילה את ההסתברות שנטע תנצח כאשר משחקים שלושה סיבובים.

$$p(Neta\ won\ the\ match)=\mathrm{P}_3(2)+\mathrm{P}_3(3)=\binom{3}{2}\cdot(\frac{1}{3})^2\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)^{3-2}+(\frac{1}{3})^3=3\cdot(\frac{1}{3})^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1+(\frac{1}{3})^3=\frac{7}{27}$$

$$p(Neta\ won\ the\ match)=p(Neta\ won\ 1st\ match)+p(Tie\ and\ Neta\ won\ the\ 2nd\ match)=\frac{1}{9}+\frac{8}{27}\cdot\frac{7}{27}=\frac{137}{729}$$

תשובה: ההסתברות, שנטע תנצח במשחק כולו, היא $\frac{137}{729}$ **.**

(2) נחשב את ההסתברות שנטע ניצחה במשחק כולו ביום השני,

אם ידוע שניצחה בדיוק ביום הראשון או השני.

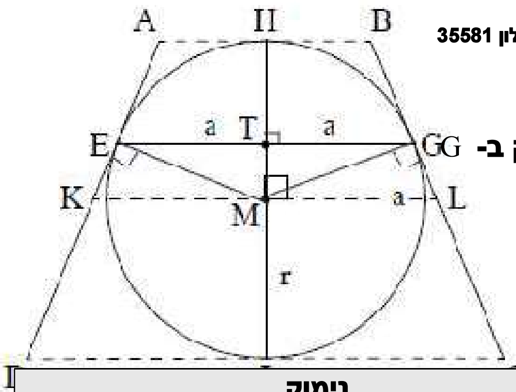
פירוש – מתוך האפשרויות שניצחה ביום הראשון והפסידה ביום השני, או הפסידה בראשון וניצחה בשני,

מה ההסתברות שהפסידה בראשון וניצחה בשני.

$$\mathrm{P}(\textit{Neta won in 2nd day} \,/\, \textit{Neta won only in one day}) = \frac{\mathrm{P}(\textit{Neta won in 2nd day} \cap \textit{Neta won only in one day})}{\mathrm{P}(\textit{Neta won only in one day})} =$$

$$\mathrm{P}(\textit{Neta won in 2nd day} \,/\, \textit{Neta won only in one day}) == \frac{(1-\frac{1}{9})\cdot\frac{137}{729}}{\frac{1}{9}\cdot(1-\frac{137}{729})+(1-\frac{1}{9})\cdot\frac{137}{729}} = \frac{137}{211}$$

תשובה: הסיכוי הוא $\frac{137}{211}$ **.**



נתונים

1. M **מרכז המעגל שרדיוסו** r **2.** AD **משיק ב-** E **3.** BC **משיק ב-** G

4. $KML \parallel EG$ **משיק 5.** $HTMI \perp KL$ **. 6.** $TG = a$

7. עבור ב. $ABCD$ **טרפז שווה שוקיים שחוסם את המעגל.**

צ"ל: א. (1) $TG \cdot ML = MG^2$ **(2)** KL

ב. (1) $BC = KL$ **(2) היקף** $ABCD$ **ג. האם ייתכן ש-** $\frac{P_{ABCD}}{P_{OM}} < \frac{4}{\pi}$

הסבר		טענה	נימוק
1	8	M מרכז המעגל שרדיוסו r	נתון
3	9	BC משיק ב- G	נתון
8, 9	10	$\sphericalangle MGL = 90°$	רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה
5	11	$HTMI \perp KL$	נתון
4	12	$KML \parallel EG$	נתון
11, 12	13	$\sphericalangle MTG = 90°$	אם אחד משני ישרים מקבילים מאונך לישר שלישי, אז גם הישר השני מאונך לו
10, 13	14	$\sphericalangle MGL = \sphericalangle MTG = 90°$	כלל המעבר
12	15	$\sphericalangle LMG = \sphericalangle MGT$	זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים
15	16	$\Delta LMG \sim \Delta MGT$	משפט דמיון זווית זווית
16	17	$\frac{LM}{MG} = \frac{MG}{GT} = \frac{LG}{MT}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
17	18	$GT \cdot LM = MG^2$	
		מ.ש.ל. א(1)	
2	19	AD משיק ב- E	נתון
8, 13, 19	20	$\sphericalangle MEK = 90°$	רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה
6, 8, 13	21	$ET = TG = a$	אנך ממרכז המעגל למיתר חוצה אותו ונתון
1	22	$EM = MG = r$	נתון
13, 22	23	$\sphericalangle EMT = \sphericalangle GMT$	הגובה לבסיס במש"ש הוא גם חוצה זווית הראש
11, 23	24	$\sphericalangle EMK = \sphericalangle GML$	הפרש זוויות
10, 20	25	$\sphericalangle MGL = \sphericalangle MEK = 90°$	כלל המעבר
24, 22, 25	26	$\Delta EMK \cong \Delta GML$	משפט חפיפה צלע זווית צלע
26	27	$MK = ML$	צ.מ.ב.ח.
18, 21, 22	28	$LM = \frac{MG^2}{GT} = \frac{r^2}{a}$	
27, 28	29	$KL = \frac{2r^2}{a}$	
		מ.ש.ל. א(2)	

הסבר		טענה	נימוק
7	30	$ABCD$. טרפז שווה שוקיים שחוסם את המעגל	נתון
30	31	$BC + AD = AB + DC$	סכום צלעות נגדיות שווה במרובע חוסם במעגל
30, 31	32	$BC = \frac{AB + DC}{2}$	
1, 30	33	$\measuredangle MHB = \measuredangle MIC = 90°$	רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה
11, 33	34	$KL \parallel AB \parallel DC$	אם אחד משני ישרים מקבילים מאונך לישר שלישי, אז גם הישר השני מאונך לו
30	35	$\measuredangle C \neq 90°, \measuredangle D \neq 90°$	אחרת $ABCD$ מלבן
34, 35	36	$BC \nparallel HI \nparallel AD$	זוויות חד צדדיות אינן משלימות ל- $180°$
34, 36	37	$HBCI, HADI$ טרפזים	זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות
1, 34, 37	38	ML, MK קטעי אמצעים בטרפזים $HBCI, HADI$	יוצאים מאמצע שוק ומקבילים לבסיסים
38	39	KL ק.א. בטרפז $ABCD$	חוצה את שוקי הטרפז
39	40	$KL = \frac{AB + DC}{2}$	קטע אמצעים בטרפז שווה למחצית סכום הבסיסים
32, 40	41	$BC = KL$	כלל המעבר
		מ.ש.ל. ב(1)	
29, 30, 31, 41	42	$P_{ABCD} = 4BC$ $P_{ABCD} = \frac{8r^2}{a}$	
		מ.ש.ל. ב(2)	
1, 42	43	$\frac{P_{ABCD}}{P_{OM}} = \frac{\frac{8r^2}{a}}{2\pi r} = \frac{4r}{a\pi}$	
43	44	$\frac{4r}{a\pi} < \frac{4}{\pi} \to r < a$ האם ייתכן	
10, 44	45	לא ייתכן	היתר הצלע הארוכה ב- ΔMGL
		מ.ש.ל ג	

א. קצת גיאומטריה לפני תחילת התרגיל (כבר עבור כל הסעיפים).

ΔABD **שווה צלעות ולכן כל זוויותיו שוות** $60°$,

כאשר AM **חוצה זווית (כי מ-** A **יוצאים שני משיקים למעגל שמרכזו** M **),**

ולכן $\sphericalangle FAM = \sphericalangle DAM = 30°$.

נוריד גם בניית עזר מקובלת אנך לנקודות ההשקה MQ.

ועוד: ב- ΔAMQ, **שזוויותיו** $30°, 60°, 90°$ **מתקיים** $AM = 2MQ = 2R$ **, ו- ובהתאם** $AL = 3R$.

$LC = AL = 3R$ **כי אלכסוני המעוין חוצים זה את זה.**

צלעות המעוין, השוות זו לזו, הן a**, כאשר** ΔAMD **שווה שוקיים, ולכן** $AQ = DQ = \frac{a}{2}$.

$\underline{\Delta AMQ}$

$$\tan 30° = \frac{MQ}{AQ}$$

$$\frac{a}{2}\tan 30° = MQ$$

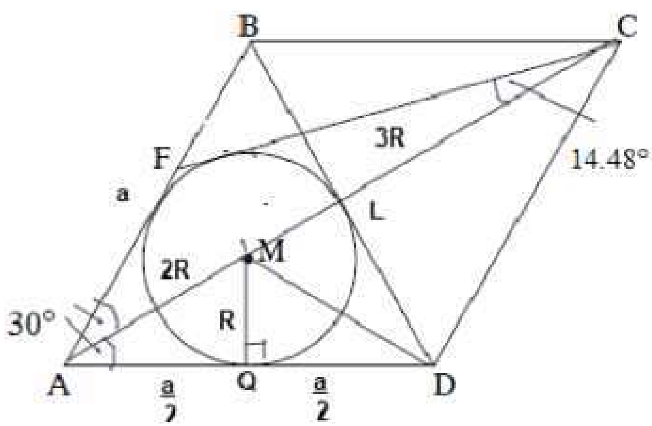
$$\boxed{R = \frac{a\sqrt{3}}{6}}$$

תשובה: $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

ב. (1) אלכסוני המעוין חוצי זוויות, לכן AC **חוצה זווית, ומכאן שהנקודה** M **נמצאת עליו כי** AM **חוצה זווית.**

תשובה: הוכחנו.

(2) $MC = ML + LC = 4R$



$\underline{\Delta KMC}$

$$\sin\sphericalangle ACF = \frac{KM}{MC}$$

$$\sin\sphericalangle ACF = \frac{R}{4R} = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\sphericalangle ACF = 14.48°} \quad \leftarrow 0 < \sphericalangle ACF < 90°$$

תשובה: $\sphericalangle ACF = 14.48°$.

ב. נמצא את שטח המשולש ACF.

$\underline{\Delta ATE}$

$$S_{\Delta ACF} = \frac{(6R)^2 \sin 14.48° \sin 30°}{2\sin(180° - 30° - 14.48°)} = 36R^2 \cdot 0.0892$$

$$S_{\Delta ACF} = 3.2118 \cdot (\frac{a\sqrt{3}}{6})^2 = \frac{3.2118 \cdot 3a^2}{36}$$

$$\boxed{S_{\Delta ACF} = 02676a^2}$$

תשובה: שטח משולש ACF **הוא** $02676a^2$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x-a}$, $-4<a<2$ **פרמטר.**

(1) נמצא את תחום ההגדרה, כאשר הביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי והמכנה שונה מ- 0 **.**

$x^2+x-2\ge 0$ **, נקבל פרבולה בעלת מינימום שמתאפסת עבור** $x=1$, $x=-2$ **,**

ובהתאם $x\ge 1$ **או** $x\le -2$ **.**

המכנה מתאפס עבור $x=\dfrac{a}{2}$ **.** $-4<a<2$ **, ולכן** $-2<\dfrac{a}{2}<1$ **,**

ולכן המכנה אינו מתאפס כאשר $x\ge 1$ **או** $x\le -2$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה: $x\ge 1$ **או** $x\le -2$ **.**

(2) לא קיימת אסימפטוטה, המקבילה לציר ה- y **, שכן בתחום ההגדרה אין** x **, שמאפס מכנה ולא מונה.**

למעשה, יש שתי נקודות קצה (שתהיינה נקודות קיצון) והן: $(1,0)$ **ו-** $(-2,0)$ **.**

(3) נמצא אסימפטוטות המקבילות לציר ה- x **.**

(ניתן למצוא גם על ידי הצבות, או נימוקים. אין חובה לרשום בעזרת גבולות !)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x-a}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\to 1}}{2x-a}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x-a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2-\frac{a}{x}}=\frac{1}{2}\quad\to\boxed{y=\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2x-a}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{2-\frac{a}{x}}=-\frac{1}{2}\quad\to\boxed{y=-\frac{1}{2}}$$

תשובה: אסימפטוטות מקבילות לציר ה- x **:** $y=\frac{1}{2}$, $x\to+\infty$ **,** $y=-\frac{1}{2}$, $x\to-\infty$ **.**

(הערה – בבגרות מספיקה שורת התשובה)

(4) אין נקודות חיתוך עם ציר ה- y **, שכן בתחום ההגדרה אין** $x=0$ **.**

תשובה: נקודות חיתוך עם ציר ה- x **:** $(1,0)$ **ו-** $(-2,0)$ **.**

(5) נשים לב שמונה הפונקציה הוא אי-שלילי, ולכן ערכי ה- y **נקבעים בהתאם לסימני המכנה.**

$2x-a>0\quad\to x>\dfrac{a}{2}\quad\to x>1$ **.**

תשובה: חיוביות: $x>1$ **, שליליות:** $x<-2$ **.**

ב. (1) נמצא את שיעורי ה- x שבעבורם $f'(x)=0$ (אם יש כאלה).

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x-a}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{(2x+1)(2x-a)}{2\sqrt{x^2+x-2}}-2\sqrt{x^2+x-2}}{(2x-a)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{(2x+1)(2x-a)-4(x^2+x-2)}{2\sqrt{x^2+x-2}}}{(2x-a)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^2-2ax+2x-a-4x^2-4x+8}{2(2x-a)^2\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-2x-2ax-a+8}{2(2x-a)^2\sqrt{x^2+x-2}}}$$

$$-2x-2ax-a+8=0$$

$$-2x(1+a)=a-8$$

נשים לב שעבור $a=-1$ מקבלים אי-שוויון מספרי ($0=-9$).

$$\boxed{x=\frac{8-a}{2(1+a)}}$$

תשובה: $x=\frac{8-a}{2(1+a)}$ **, עבור** $a\neq-1$ **.**

(2) כפי שהוסבר בתת-סעיף ב(1), כאשר $a=-1$ מתקבל אי שוויון מספרי.

תשובה: עבור $a=-1$, $f'(x)\neq 0$ בכל תחום ההגדרה $x\geq 1$ או $x<-2$.

ג. נציב $a=-1$ ונקבל ש- $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x+1}$ **.**

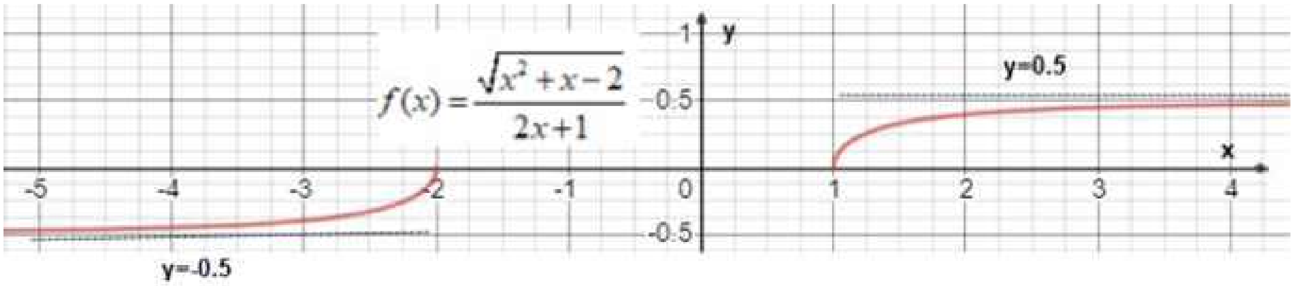
(1) כיוון ש- $a=-1$, אז $f'(x)\neq 0$ בכל תחום ההגדרה, ואין נקודות קיצון פנימיות.

$f(x)>0$, עבור $x>1$, כאשר $(1,0)$ נקודת מינימום, והפונקציה עולה בתחום $x>1$.

$f(x)<0$, עבור $x<-2$, כאשר $(-2,0)$ נקודת מקסימום, והפונקציה עולה בתחום $x<-2$.

תשובה: עלייה: $x>1$ או $x<-2$, ירידה: אף x .

(2) הסקיצה המתאימה:



ד. נחשב את האינטגרל המסוים, על פי זיהוי הנגזרת הפנימית.

$$\int_3^4 \frac{1}{f(x)} = \int_3^4 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-2}} = \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}} \cdot (2x+1)\,dx = \cdot 2\sqrt{x^2+x-2}\,\Big]_3^4$$

$$\left.\begin{matrix} x=4 & 2\sqrt{18} \\ x=3 & 2\sqrt{10} \end{matrix}\right\} \boxed{\int_3^4 \frac{1}{f(x)} = 2\sqrt{18}-2\sqrt{10} \sim 2.161}$$

תשובה: $\int_3^4 \frac{1}{f(x)} = 2\sqrt{18}-2\sqrt{10} \sim 2.161$.

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3\sin x$, בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

(1) נבדוק את הזוגיות של הפונקציה .

$$f(-x)=(-x)^3\sin(-x)$$
$$f(-x)=-x^3(-\sin x)$$
$$f(-x)=x^3\sin x$$
$$f(-x)=f(x)$$

תשובה: $f(x)$ זוגית (סימטרית לציר ה- y) .

(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y=0$.

$$0=x^3\sin x$$
$$x=0\quad\to\boxed{(0,0)}$$
$$\sin x=0$$
$$x=\pi k\quad\to\boxed{(-\pi,0)},\boxed{(\pi,0)}$$

תשובה: $(\pi,0)$, $(0,0)$, $(-\pi,0)$.

(3) כאשר $0\le x\le\pi$, או $x=-\pi$ מתקיים $x^3\ge 0$ וגם $\sin x\ge 0$ ובהתאם מכפלתם אי-שלילית.

כאשר $-\pi<x<0$ מתקיים $x^3<0$ וגם $\sin x<0$ ובהתאם מכפלתם חיובית.

מסקנה: שלוש נקודות החיתוך עם ציר ה- x הן נקודות מינימום,
וחייבות להיות לפחות שתי נקודות מקסימום בתחום הנתון.

תשובה: הוכחנו שהפונקציה אי-שלילית בתחום הנתון $-\pi\le x\le\pi$.

(4) נבדוק את הזוגיות של הפונקציה $f'(x)$.

$$f(x)=x^3\sin x$$
$$f'(x)=3x^2\sin x+x^3\cos x$$
$$\boxed{f'(x)=x^2(3\sin x+x\cos x)}$$
$$f'(-x)=(-x)^2(3\sin(-x)+(-x)\cos(-x))$$
$$f(-x)=x^2(-3\sin x-x\cos x)$$
$$f'(-x)=-x^2(3\sin x+x\cos x)$$
$$\boxed{f'(-x)=-f'(x)}$$

תשובה: $f'(x)$ אי-זוגית (סימטרית לראשית הצירים) .

ב. (1) נראה ששיעורי ה- x **, שעבורם** $f'(x)=0$ **, מקיימים** $\tan x=-\frac{1}{3}x$ **:**

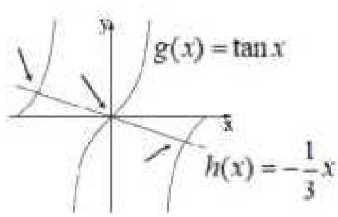
$$f'(x)=x^2(3\sin x+x\cos x)$$
$$x^2(3\sin x+x\cos x)=0$$
$$x=0 \quad \to \tan 0=0\,,-\frac{1}{3}\cdot 0=0 \quad \to o.k.$$
$$3\sin x+x\cos x=0$$
$$3\sin x=-x\cos x \quad /:3\cos x\neq 0$$
$$\tan x=-\frac{1}{3}x \quad \to o.k.$$

תשובה: הוכחנו.

(2) על פי הציור משמאל, הגרף של $g(x)=\tan x$ **והגרף של** $h(x)=-\frac{1}{3}x$

נפגשים שלוש פעמים, ולכן שלוש נקודות בתחום מקיימות $f'(x)=0$ **.**

תשובה: שלוש נקודות, בתחום הנתון $-\pi\le x\le\pi$ **, מקיימות** $f'(x)=0$ **.**



ג. (1) נתון $x=2.46$ **קיצון. כמו שהראינו, כבר קודם, נדרשות לפחות שתי נקודות מקסימום פנימיות.**

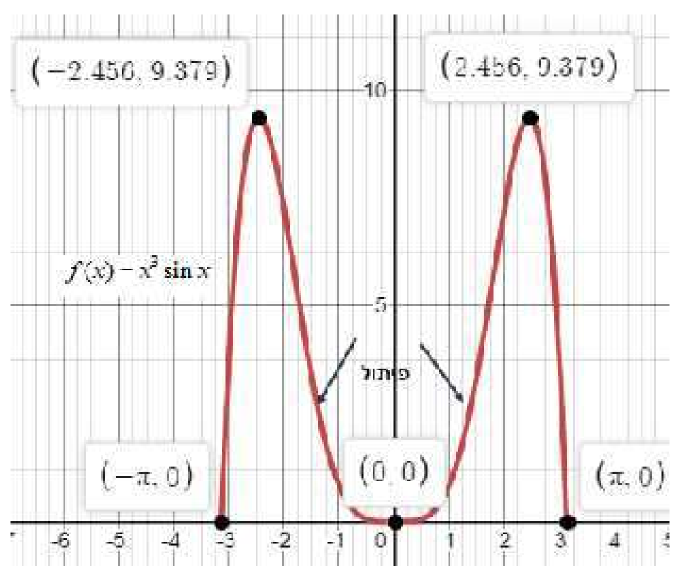
$f(2.46)=2.46^3\sin 2.46=9.38 \quad \to (2.46,9.38),\max$ **,**

ועל-פי הזוגיות של $f(x)$ **גם** $(-2.46,9.38),\max$ **.**

כמו כן הראינו גם ש- $(\pi,0)$ **,** $(0,0)$ **,** $(-\pi,0)$ **נקודות מינימום, עקב אי השליליות של הפונקציה.**

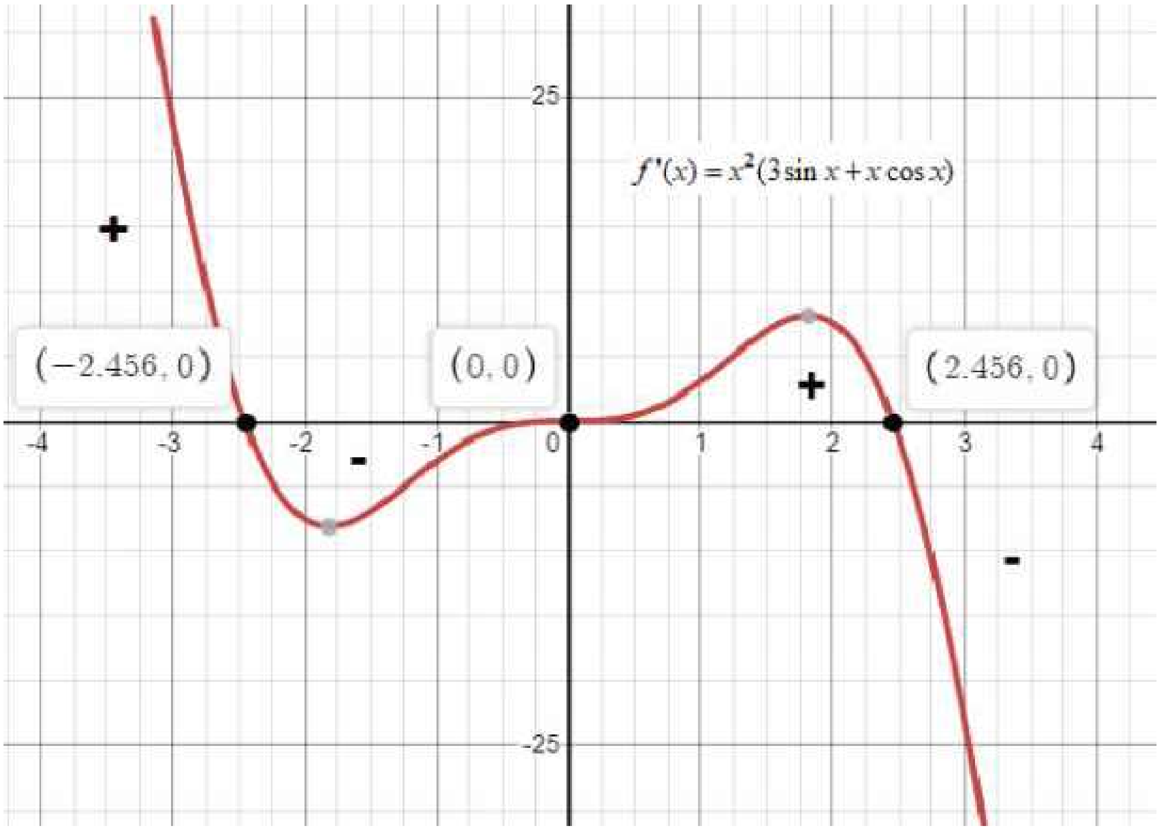
תשובה: $x=\pi$ **,** $x=0$ **,** $x=-\pi$ **מינימום,** $x=2.46$ **,** $x=-2.46$ **מקסימום .**

(2) סקיצה של $f(x)=x^3\sin x$ **, כולל סימון אפשרי למיקום נקודות פיתול.**



ד. (1) שיקולים לשרטוט גרף הנגזרת $f'(x)=x^2(3\sin x+x\cos x)$ **, בתחום** $-\pi\le x\le\pi$ **.**

- **הנגזרת היא פונקציה אי-זוגית, כלומר סימטרית לראשית הצירים.**
- **הנגזרת התאפסה שלוש פעמים:** $x=2.46$ **,** $x=0$ **,** $x=-2.46$ **.**
- **הנגזרת חיובית כאשר הפונקציה עולה:** $0<x<2.46$ **או** $-\pi<x<-2.46$
- **הנגזרת שלילית כאשר הפונקציה יורדת:** $2.46<x<\pi$ **או** $-2.46<x<0$



.

הערה – הגרף ממוחשב, ואין יכולת לזהות מראש, בתרגיל הזה, קיומו של פיתול לנגזרת בראשית.

(2) כמו שהראינו בסקיצה של $f(x)$ **קיימות לפחות שתי נקודות פיתול, שסומנו בחץ.**

בנוסף, ניתן לראות שיש שתי נקודות קיצון פנימיות לגרף של $f'(x)$ **.**

כאשר $f'(x)$ **עוברת מעלייה לירידה, אז הנגזרת שלה,** $f''(x)$ **עוברת מחיוביות לשליליות,**

ומכאן ש- $f(x)$ **מקעירות כלפי מעלה** $(\cup)$ **לקעירות כלפי מטה** $(\cap)$ **– ויש נקודת פיתול.**

כאשר $f'(x)$ **עוברת מירידה לעלייה, אז הנגזרת שלה,** $f''(x)$ **עוברת משליליות לחיוביות,**

ומכאן ש- $f(x)$ **מקעירות כלפי מטה** $(\cap)$ **לקעירות כלפי מעלה** $(\cup)$ **– ויש נקודת פיתול.**

תשובה: לפונקציה $f(x)$ **יש לפחות שתי נקודות פיתול בתחום.**

א. (1) נמצא את תחומי ההגדרה של שתי הפונקציות.

$f(x)=\sqrt{-x^2+7x}$ **. בתחום ההגדרה הביטוי שבתוך השורש הוא אי-שלילי.**

$-x^2+7x\geq 0$ **הוא ביטוי של פרבולה בעלת מקסימום, המתאפסת עבור** $x=7$ **, או** $x=0$ **,**

ובהתאם מוגדרת בתחום האי-שליליות $0\leq x\leq 7$ **.**

$g(x)=\sqrt{14-2x}$ **. בתחום ההגדרה הביטוי שבתוך השורש הוא אי-שלילי.**

$14-2x\geq 0$ **ובהתאם מוגדרת עבור** $x\leq 7$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה של $f(x)=\sqrt{-x^2+7x}$ **הוא** $0\leq x\leq 7$ **, ושל** $g(x)=\sqrt{14-2x}$ **:** $x\leq 7$ **.**

(2) למציאת שיעורי ה- x **של הנקודות** B **ו-** D **נשווה בין הפונקציות.**

למציאת שיעורי הנקודה D **נשווה בין הפונקציות.**

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{-x^2+7x} \\ g(x)=\sqrt{14-2x} \end{cases}$$

$$\sqrt{-x^2+7x}=\sqrt{14-2x}$$

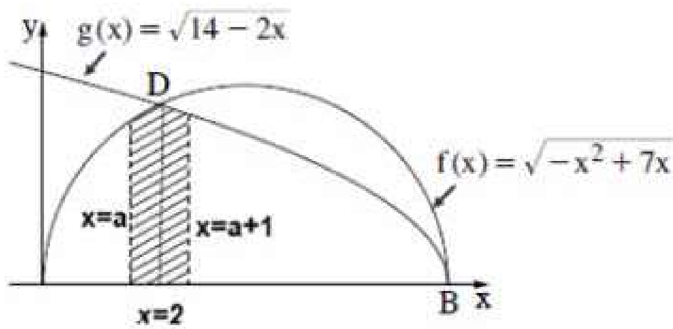
$$-x^2+7x=14-2x$$

$$0=x^2-9x+14$$

$$\boxed{x_B=2} \quad \to D(2,10)$$

$$\boxed{x_D=7} \quad \to B(7,0)$$

תשובה: $x_D=7$ **,** $x_B=2$ **.**



ב. (1) הפונקציה שיש להביא ל*מקסימום* היא *נפח גוף הסיבוב*.

נתון $1 \le a \le 2$ **.**

$$V = \pi\int_a^2 (\sqrt{-x^2+7x})^2 + \pi\int_2^{a+1} (\sqrt{14-2x})^2$$

$$V = \pi\int_a^2 (-x^2+7x)dx + \pi\int_2^{a+1} (14-2x)dx$$

$$V = \pi\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}\right]_a^2 + \pi\left[14x-\frac{2x^2}{2}\right]_2^{a+1}$$

$$V = \pi\left(\frac{34}{3}+\frac{a^3}{3}-3.5a^2\right)+\pi(14(a+1)-(a+1)^2-24)$$

$$V = \pi\left(\frac{34}{3}+\frac{a^3}{3}-3.5a^2+14a+14-a^2-2a-1-24\right)$$

$$\boxed{V = \pi\left(\frac{a^3}{3}-4.5a^2+12a+\frac{1}{3}\right)}$$

$$\boxed{V' = a^2-9a+12}$$

$$a^2-9a+12=0$$

$$\boxed{\cancel{a=7.37}} \quad \leftarrow 1 \le a \le 2$$

$$\boxed{a=1.63}$$

$$\left.\begin{array}{l} V(1)=8\frac{1}{6}\pi \\ V(1.63)=9.38\pi \\ V(2)=9\pi \end{array}\right\} \boxed{a=1.63}, \max \ \boxed{a=1}, \min$$

תשובה: $a=1.63$ **, עבורו נפח גוף הסיבוב הוא מקסימלי.**

(2) על פי ערכי פונקציית הנפח, מינימום מוחלט מתקבל עבור $a=1$ **.**

תשובה:$a=1$**, עבורו נפח הגוף הוא מינימלי.**