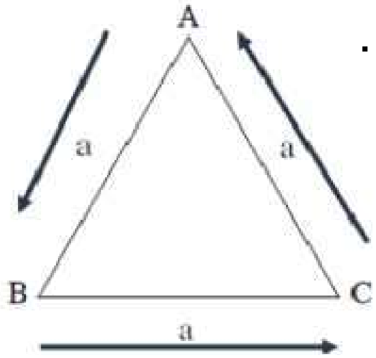
א. נסמן ב- x (מטר לשנייה, מ"ש) את מהירותו של רוכב ב.

מכאן ש- $x+2$ (מטר לשנייה, מ"ש) היא מהירותו של רוכב א.

רוכב א השלים שתי הקפות של המסלול , ולכן המרחק שעבר הוא $2\cdot 3a=6a$ **.**



רוכב ב השלים הקפה ושליש , ולכן המרחק שעבר הוא $1\frac{1}{3}\cdot 3a=4a$ **.**

זמני הרכיבה של רוכב א ושל רוכב ב,

עד שהגיעו ל- A ול- B בהתאמה בפעם השנייה, היו זהים,

והמשוואה המתאימה היא $\frac{6a}{x+2}=\frac{4a}{x}$

$$\frac{6a}{x+2}=\frac{4a}{x} \quad /:2a>0$$

$$3x=2(x+2)$$

$$3x=2x+4$$

$$\boxed{x=4} \quad \rightarrow \boxed{x+2=6}$$

תשובה: מהירותו של רוכב א הייתה 6 מ"ש, ומהירותו של רוכב ב הייתה 4 מ"ש.

ב. רוכב א השלים חמש הקפות של המסלול , ולכן המרחק שעבר הוא $5\cdot 3a=15a$**.**

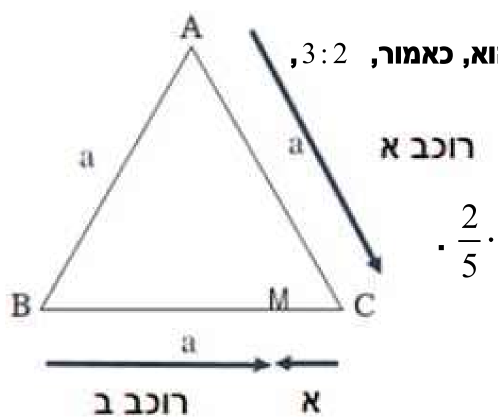
היחס בין מהירותו של רוכב א למהירותו של רוכב ב הוא $6:4=3:2$ **,**

ולכן זהו גם יחס המרחקים (כאשר זמני הרכיבה שווים), ומכאן שרוכב ב עבר $15a\cdot\frac{2}{3}=10a$**,**

והוא עשה שלוש הקפות ושליש, והגיע לנקודה B .

תשובה: רוכב ב יהיה בנקודה B שעל המשולש.

ג. הרוכבים רוכבים עתה בכיוונים מנוגדים.



יחס המהירויות בין רוכב א לבין רוכב ב שווה ליחס המרחקים והוא, כאמור, $3:2$**,**

ולכן עד לפגישה יעבור רוכב א מרחק גדול יותר,

ומכאן שהנקודה M נמצאת על הצלע BC .

רוכב ב יעבור שתי חמישיות מהמרחק שירכבו ביחד: $\frac{2}{5}\cdot 2a=\frac{4}{5}a$ **.**

תשובה: הנקודה M נמצאת על הצלע BC,

ומחלקת את הצלע ביחס $BM:MC=4:1$**.**

ד. למחרת חזרו הרוכבים לרכב נגד כיוון השעון,

כאשר רוכב ב חלף על פני רוכב א בפעם הראשונה לאחר 6 דקות, כלומר לאחר 360 שניות.

הפרש המרחקים שעברו הרוכבים שווה להיקף המשולש.

$360\cdot 6-360\cdot 4=720$ **.**

תשובה: היקף המשולש הוא 720 מטר.

א. הסדרה a_n **מקיימת את הכלל:** $a_{n+1}+a_n=6n+5$ **לכל** n **טבעי.**

$$(n=n+1) \quad a_{n+2}+a_{n+1}=6(n+1)+5$$
$$a_{n+2}+a_{n+1}=6n+11$$

ואם נפחית ממשוואה זו את המשוואה הנתונה, נקבל: $a_{n+2}-a_n=6$ **.**

המשמעות היא שסדרת האיברים במקומות האי-זוגיים, או במקומות הזוגיים, היא חשבונית שהפרשה 6 **.**

תשובה: הוכחנו ש: $a_{n+2}=a_n+6$ **, כאשר** $c=6$ **.**

ב. תשובה: לדוגמה: $1, 2, 7, 8, 13, 14...$ **.**

ג. נתון כי הסדרה a_n **כולה היא חשבונית.**

לכן, ההפרש בין איברי הסדרה כולה, יהיה חצי מההפרש של הסדרות החשבוניות במקומות הזוגיים, או האי-זוגיים. כלומר ההפרש של הסדרה כולה הוא $6:2=3$ **.**

$$a_{n+1}+a_n=6n+5$$
$$a_2+a_1=6\cdot 1+5$$
$$a_1+3+a_1=11$$
$$\boxed{a_1=4}$$

תשובה: $a_1=4$ **.**

ד. בנו סדרה חדשה בה $2n+1$ **איברים, ולכן האיבר האמצעי בה הוא** a_{n+1} **(**n **איברים לפניו ולאחריו).**

בסדרה זו האיבר הכללי הוא a_n-n **, כאשר** a_n **הוא איבר בסדרה המקורית.**

$$a_{n+1}=43$$
$$a_{n+1}-(n+1)=43$$
$$4+3(n+1-1)-n-1=43$$
$$2n=40$$
$$\boxed{2n+1=41}$$

כלומר, בסדרה החדשה 41 **איברים.**

סכום של סדרה חשבונית, שבה מספר אי-זוגי של איברים,

הוא מכפלת האיבר האמצעי במספר איברי הסדרה.

(הסבר: $S_{2n+1}=....+a_{n+1}-2d+a_{n+1}-d+a_{n+1}+a_{n+1}+d+a_{n+1}+2d+...=(2n+1)a_{n+1}$ **.)**

$S_{41}=43\cdot 41=1,763$ **.**

תשובה: סכום הסדרה החדשה הוא $1,763$ **.**

א. נסמן x - מספר הכדורים הכחולים שרשומה עליהם הספרה 0,

ובהתאם $4x$ הוא מספר הכדורים האדומים שרשומה עליהם הספרה 1.

נציב את כל הנתונים בטבלה מתאימה.

	צבע כחול - B	צבע אדום - R	צבע צהוב Y	
One - הספרה 1		$4x$		28
Zero - הספרה 0	x	$20-4x$	1	12
		20	8	40

המשוואה המתאימה היא $20-4x+x+1=12$ ומכאן ש- $9=3x$ ו- $x=3$.

נשלים את כל הטבלה.

	צבע כחול - B	צבע אדום - R	צבע צהוב - Y	
One - הספרה 1	9	12	7	28
Zero - הספרה 0	3	8	1	12
	12	20	8	40

תשובה: ההסתברות שדני הוציא כדור כחול שרשומה עליו הספרה 1 היא $\frac{9}{40}$.

ב. ידוע שדני הוציא כדור כחול <u>או</u> כדור שרשומה עליו הספרה 1.

נחשב את ההסתברות שדני הוציא כדור שרשומה עליו הספרה 0.

$$p(\text{Zero} / (\text{B} \cup \text{One})) = \frac{\text{N}(\text{Zero} \cap (\text{B} \cup \text{One}))}{\text{N}(\text{B} \cup \text{One})} = \frac{3}{9+3+12+7} = \frac{3}{31} .$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{3}{31}$.

ג. דני יצבור 5 נקודות אחרי 6 פעמים <u>בדיוק</u> אם יצבור 4 נקודות ב- 5 הפעמים הראשונות,

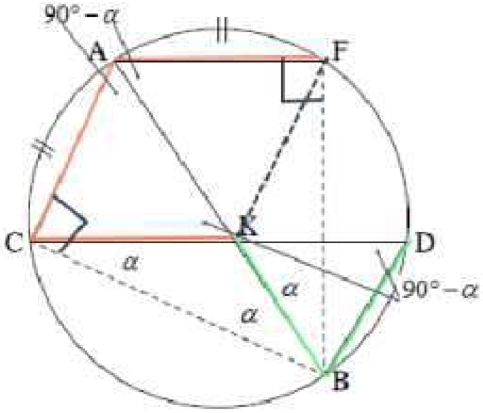
ויוסיף נקודה בפעם השישית.

בחמש הפעמים הראשונות מדובר בהתפלגות בינומית, כאשר $n=5$, $p(\text{One})=\frac{28}{40}=0.7$, $k=4$.

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי:

$$p(5 \text{ points } \textit{in exectly } 6 \textit{ rounds}) = \text{P}_5(4) \cdot \text{P}_1(1) = \binom{5}{4} \cdot 0.7^4 \cdot 0.3^1 \cdot 0.7 = 5 \cdot 0.7^4 \cdot 0.3^1 \cdot 0.7 = 0.252105$$

תשובה: ההסתברות היא 0.252105 .



<u>נתונים</u> .1 AB **קוטר במעגל .2** $AF \parallel CD$ **.3** $\overset{\frown}{CA}=\overset{\frown}{AF}$.

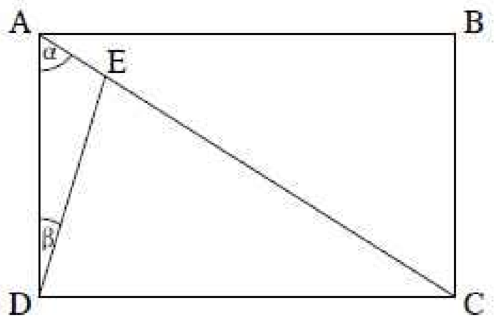
עבור ג. 4. $BD\cdot AB = CD\cdot AC$.

צ"ל: א. (1) $\sphericalangle FAB = \sphericalangle CAB$ **(2)** $BK = BD$ **ב.** $AFKC$ **מעוין**

ג. (1) $\Delta BDC \sim \Delta CAB$ **(2)** CD **קוטר במעגל**

הסבר		טענה	נימוק
3	5	$\overset{\frown}{CA}=\overset{\frown}{AF}$	
5	6	$\sphericalangle FBA = \sphericalangle CBA = \alpha$	על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות
1	7	AB קוטר במעגל	נתון
7	8	$\sphericalangle ACB = \sphericalangle AFB = 90^\circ$	על קוטר נשענת זווית היקפית ישרה
8 ,6	9	$\sphericalangle FAB = \sphericalangle CAB = 90^\circ-\alpha$	
		מ.ש.ל. א (1)	
2	10	$AF \parallel CD$	
10 ,9	11	$\sphericalangle DKB = \sphericalangle FAK = 90^\circ-\alpha$	זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים
9	12	$\sphericalangle CDB = \sphericalangle CAB = 90^\circ-\alpha$	על קשת משותפת נשענות זוויות היקפיות שוות
12 ,11	13	$\sphericalangle DKB = \sphericalangle CDB$	
13	14	$BK = BD$	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ΔBKD
		מ.ש.ל. א (2)	
10 ,9	15	$\sphericalangle AKC = \sphericalangle FAK = 90^\circ-\alpha$	זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים
15 ,12	16	$\sphericalangle CAB = \sphericalangle AKC$	זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים
16	17	$AC = CK$	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ΔACK
5	18	$AC = AF$	על קשתות שוות נשענים מיתרים שווים
18 ,17	19	$AF = CK$	
19 ,10	20	$AFKC$ מקבילית	זוג צלעות נגדיות שווה ומקביל
20 ,18	21	$AFKC$ מעוין	מקבילית עם צלעות סמוכות שוות
		מ.ש.ל. ב	
4	22	$BD\cdot AB = CD\cdot AC$	
22	23	$\frac{BD}{CD}=\frac{AC}{AB}$	
23 ,12	24	$\Delta BDC \sim \Delta CAB$	משפט דמיון צלע זווית צלע
		מ.ש.ל. ג (1)	
24 ,8	25	$\sphericalangle CBD = \sphericalangle BAC = 90^\circ$	זוויות מתאימות שוות במשולשים דומים
25	26	CD קוטר במעגל	הזווית ההיקפית, שנשענת עליו, היא ישרה
		מ.ש.ל. ג (2)	

א. ΔACD **ישר זווית , ולכן** $AC = 2R_1$ **קוטר המעגל החוסם משולש זה, ואת המלבן** $ABCD$ **.**



$\underline{\Delta ADC}$

$$\cos\alpha = \frac{AD}{AC}$$

$$\boxed{2R_1\cos\alpha = AD}$$

$\underline{\Delta ADE}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{AD}{\sin(180° - (\alpha+\beta))} = 2R_2$$

$$\frac{2R_1\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = 2R_2$$

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}}$$

תשובה: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}$ **.**

ב. נתון: $\alpha = \beta$ **.**

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = 2\sin\alpha$$

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} < 2} \quad \leftarrow 0° < \alpha < 90°,\ 0 < \sin\alpha < 1$$

ג. נתון כי $\alpha = 60°$, $\beta = 15°$.

(1) $\sphericalangle EDC = 90° - 15° = 75°$ (**הפרש זוויות**).

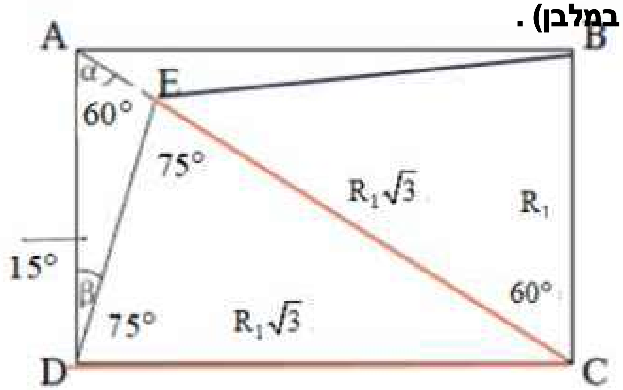
$\sphericalangle DEC = 15° + 60° = 75°$ (**זווית חיצונית ל-** ΔADE).

ΔDEC **שווה שוקיים,** $DC = EC$ (**מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות** ΔDEC).

תשובה: הוכחנו.

(2) $\sphericalangle BCE = \sphericalangle CAD = 60°$ (**זוויות מתחלפות שוות בין מקבילים**).

$BC = AD = 2R_1 \cos 60° = R_1$ (**צלעות נגדיות שוות במלבן**) .



$\underline{\Delta ADC}$

$$\sin 60° = \frac{DC}{AC}$$

$$2R_1 \sin 60° = DC$$

$$\boxed{DC = R_1\sqrt{3}}$$

$EC = DC = R_1\sqrt{3}$ (**שוקיים שוות במש"ש**)

$\underline{\Delta BEC}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

$$(BE)^2 = (EC)^2 + (BC)^2 - 2EC \cdot BC \cdot \cos\sphericalangle BCE$$

$$(BE)^2 = (R_1\sqrt{3})^2 + R_1{}^2 - 2 \cdot R_1\sqrt{3} \cdot R_1 \cdot \cos 60°$$

$$(BE)^2 = 3R_1{}^2 + R_1{}^2 - R_1{}^2\sqrt{3}$$

$$\boxed{(BE)^2 = (4-\sqrt{3})\, R_1{}^2}$$

תשובה: $(BE)^2 = (4-\sqrt{3})\, R_1{}^2$.

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=a\cos 2x+\sin^2 x$ **, בתחום** $-\pi \le x \le \pi$ **.**

נבדוק את הזוגיות של הפונקציה .

$$f(-x)=a\cos(-2x)+\sin^2(-x)$$
$$f(-x)=a\cos 2x+(-\sin x)^2$$
$$f(-x)=a\cos 2x+\sin^2 x$$
$$f(-x)=f(x)$$

תשובה: $f(x)$ **זוגית (סימטרית לציר ה-** y **) .**

ב. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, שנתון שאינה קבועה, ונקבע את סוגן.

תחילה נמצא את נקודות הקצה, שתהיינה גם נקודות קיצון.

$f(\pi)=a\cos 2\pi+\sin^2\pi=a \quad \to (\pi,a)$ **, ועקב הזוגיות של הפונקציה גם** $(-\pi,a)$**.**

$$f'(x)=2a\sin 2x+2\sin x\cos x$$
$$f'(x)=-2a\sin 2x+\sin 2x$$
$$\boxed{f'(x)=\sin 2x(-2a+1)}$$
$$\sin 2x=0$$
$$2x=\pi k$$
$$\boxed{x=\frac{\pi k}{2}}$$

ונקבל את (π,a) **,** $(\frac{\pi}{2},1-a)$ **,** $(0,a)$ **, וגם עקב הזוגיות את** $(-\frac{\pi}{2},1-a)$ **,** $(-\pi,a)$ **.**

נשים לב שהביטוי $(-2a+1)$ **מתאפס עבור** $a=0.5$ **,**

ולכן כאשר $a=0.5$ **, הנגזרת שווה לאפס תמיד, והפונקציה קבועה בניגוד לנתון (הסבר גם לסעיף ג).**

הביטוי $(-2a+1)$ **הוא של פונקציה קווית יורדת, העוברת מחיוביות לשליליות, כאשר** $a=0.5$ **.**

נקבע את סוג נקודות הקיצון הפנימיות, בעזרת הנגזרת השנייה.

$$\boxed{f''(x)=2\cos 2x(-2a+1)}$$

$a>0.5$	$a<0.5$
$f''(\frac{\pi}{2})=\cos(2\cdot\frac{\pi}{2})\cdot(+)=(-)\cdot(-)>0$	$f''(\frac{\pi}{2})=\cos(2\cdot\frac{\pi}{2})\cdot(+)=(-)\cdot(+)<0$
ולכן $(\frac{\pi}{2},1-a)$ **נקודת מינימום,**	**ולכן** $(\frac{\pi}{2},1-a)$ **נקודת מקסימום,**
ועקב הזוגיות גם $(-\frac{\pi}{2},1-a)$ **מינימום,**	**ועקב הזוגיות גם** $(-\frac{\pi}{2},1-a)$ **מקסימום,**
ומכאן שנקודות הקצה $(-\pi,a)$, (π,a) **הן מקסימום.**	**ומכאן שנקודות הקצה** $(-\pi,a)$, (π,a) **הן מינימום.**
$f''(0)=2\cos(2\cdot 0)\cdot(+)=(+)\cdot(-)<0$	$f''(0)=-2\cos(2\cdot 0)\cdot(+)=(-)\cdot(+)<0$
ולכן $(0,a)$ **נקודת מקסימום.**	**ולכן** $(0,a)$ **נקודת מינימום.**

דרך חלופית, להוכחת סוג הקיצון, היא באמצעות השתנות ערכי ה- y **.**

אם $1-a>a$ **אז** $a<\frac{1}{2} \leftarrow\quad -2a>1$ **, ומכאן ניתן להסיק את סוגן של נקודות הקיצון.**

עבור $a<\frac{1}{2}$ **נקבל ש-** $f(\frac{\pi}{2})>f(0)=f(\pi)$ **, ו-** $f(-\frac{\pi}{2})>f(0)=f(-\pi)$ **.**

עבור $a>\frac{1}{2}$ **נקבל ש-** $f(\frac{\pi}{2})<f(0)=f(\pi)$ **, ו-** $f(-\frac{\pi}{2})<f(0)=f(-\pi)$ **.**

תשובה: עבור $a<\frac{1}{2}$ **:** (π,a) **מינימום,** $(\frac{\pi}{2},1-a)$ **מקסימום,** $(0,a)$ **מינימום,**

$(-\frac{\pi}{2},1-a)$ **מקסימום,** $(-\pi,a)$ **מינימום.**

עבור $a>\frac{1}{2}$ **:** (π,a) **מקסימום,** $(\frac{\pi}{2},1-a)$ **מינימום,** $(0,a)$ **מקסימום,**

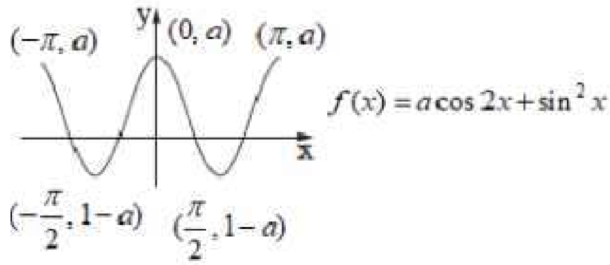
$(-\frac{\pi}{2},1-a)$ **מינימום,** $(-\pi,a)$ **מקסימום.**

ג. תשובה: עבור $a=\frac{1}{2}$ **הפונקציה קבועה (הסבר ניתן בסעיף ב).**

ד. נתון $a>1$.

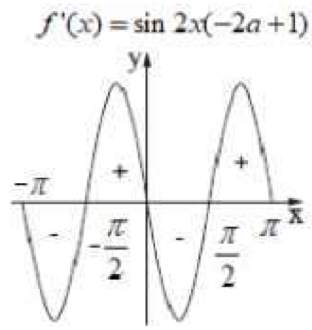
(1) נסרטט את $f(x)$ לפי סוגי נקודות הקיצון, כאשר $a>\frac{1}{2}$,

ונשים לב ש- $1-a<0$, ולכן נקודות המינימום מתחת לציר ה- x .



(2) נסרטט את $f'(x)$ לפי סוגי נקודות הקיצון, כאשר $a>\frac{1}{2}$.

- נשים לב שהנגזרת התאפסה גם בקצוות.
- כאשר הפונקציה עולה, הנגזרת חיובית.
- כאשר הפונקציה יורדת, הנגזרת שלילית.
- ניתן "לחוש" של- $f(x)$ ארבע נקודות פיתול, ובהתאם ארבע נקודות קיצון ל- $f'(x)$.
- $f'(x)=\sin 2x(-2a+1)$ פונקציה אי-זוגית.



ה. לפונקציה, האי-זוגית, $\sin 2x$ מחזוריות של $\frac{\pi}{2}k$,

לכן ארבעת השטחים שווים, וגודל כ"א מהם שווה ל- $12:4=3$.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(f'(x)-0)dx=f(x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$f(\pi)-f(\frac{\pi}{2})=3$$

$$a-(1-a)=3$$

$$a-1+a=3$$

$$2a=4$$

$$\boxed{a=2}$$

ניתן גם לחשב את שני השטחים מימין, וסכומם שווה ל- $12:2=6$ - עקב אי הזוגיות של פונקציית הנגזרת.

תשובה: $a=2$.

הפונקציה שיש להביא *למינימום* **היא** *שטח המשולש* ACD .

כיוון שהקוטר AB **מאונך למיתר** CD**, הרי שהוא גם חוצה את המיתר,**

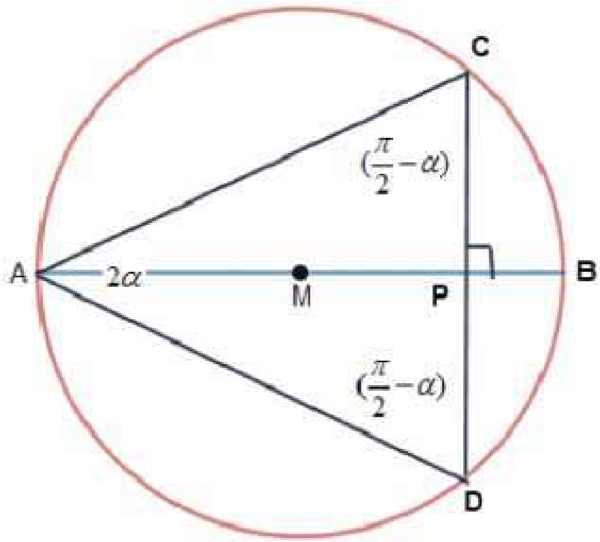
ומכאן שבמשולש ACD **הגובה מתלכד עם התיכון והמשולש הוא שווה שוקיים.**

נפתור את התרגיל בשתי דרכים.

<u>פתרון טריגונומטרי עם פונקציה טריגונומטרית</u>

נסמן $\sphericalangle DAC = 2\alpha$ **, כאשר** $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$ **, כי אם** $\frac{\pi}{2} \le 2\alpha < \pi$ **אז הנקודה** P **הייתה מהמרכז לכיוון הנקודה** A .

מכאן שכל אחת מזוויות הבסיס, השוות זו לזו, היא $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.



$$S_{\Delta ACD} = 2 \cdot 10^2 \sin 2\alpha \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

$$S_{\Delta ACD} = 200 \cdot 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos^2\alpha$$

$$\boxed{S_{\Delta ACD} = 400 \sin\alpha \cdot \cos^3\alpha}$$

$$(S_{\Delta ACD})' = 400\left[\cos\alpha \cdot \cos^3\alpha + \sin\alpha \cdot (-3\cos^2\alpha \sin\alpha)\right]$$

$$(S_{\Delta ACD})' = 400\,(\cos^4\alpha - 3\sin\alpha\cos^2\alpha\sin\alpha)$$

$$(S_{\Delta ACD})' = 400\cos^2\alpha(\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha = 0 \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha = 0$$

$$-3\sin^2\alpha = -\cos^2\alpha \quad / : 3\cos^2\alpha > 0$$

$$\tan^2\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\tan\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ **פתרון יחידי בתחום.**

$$\left.\begin{array}{l} (S_{\Delta ACD})'(\frac{\pi}{7}) = 80 > 0 \\ (S_{\Delta ACD})'(\frac{\pi}{5}) = -100 < 0 \end{array}\right\} \alpha = \frac{\pi}{6}, \max$$

השטח המקסימלי הוא: $S_{\Delta ACD}(\frac{\pi}{6}) = 400\sin(\frac{\pi}{6}) \cdot \cos^3(\frac{\pi}{6}) = 75\sqrt{3}$

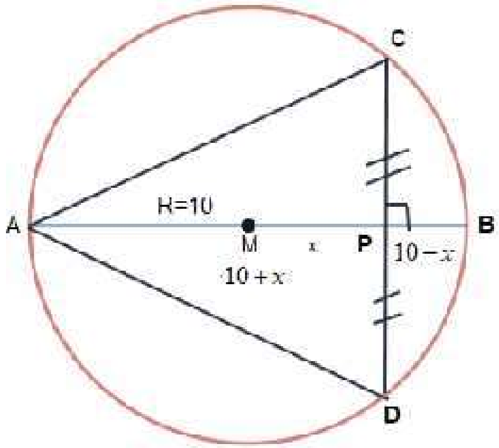
תשובה: השטח המקסימלי של משולש ACD **הוא** $75\sqrt{3}$**.**

<u>פתרון גיאומטרי עם פונקציית שורש</u>

נסמן $MP=x$ **, ולכן** $AP=10+x$ **,** $BP=10-x$ **.**

שני מיתרים נחתכים במעגל, כך שמכפלת הקטעים הנוצרים שווה:

$$AP\cdot BP=CP\cdot DP$$
$$(10+x)(10-x)=(CP)^2$$
$$CP=\sqrt{100-x^2}$$
$$\boxed{CD=2\sqrt{100-x^2}}$$



$$S_{\Delta ACD}=\frac{(10+x)\cdot \cancel{2}\sqrt{100-x^2}}{\cancel{2}}$$
$$(S_{\Delta ACD})'=\sqrt{100-x^2}+\frac{(10+x)\cdot(-\cancel{2}x)}{\cancel{2}\sqrt{100-x^2}}$$
$$(S_{\Delta ACD})'=\frac{100-x^2-10x-x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$
$$\boxed{(S_{\Delta ACD})'=\frac{-2x^2-10x+100}{\sqrt{100-x^2}}}$$
$$-2x^2-10x+100=0$$
$$\boxed{x=5}\quad o.k.\quad 0<x<10$$
$$x=-10\quad false$$

מכנה הנגזרת חיובי. הטרינום הריבועי במונה הוא של פרבולה הפוכה, בעלת מקסימום ("בוכה"), העוברת מחיוביות לשליליות עבור $x=5$ **, ולכן הפונקציה עוברת מעלייה לירידה, וזהו מקסימום.**

השטח המקסימלי הוא: $S_{\Delta ACD}(5)=(10+5)\sqrt{100-5^2}=75\sqrt{3}$

תשובה: השטח המקסימלי של משולש ACD **הוא** $75\sqrt{3}$**.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+bx-c}{x^2-4}$ **,** c,b **פרמטרים.**

מכנה מתאפס עבור $x=\pm 2$**, ולכן** $x\neq \pm 2$ **הוא תחום ההגדרה.**

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x\neq \pm 2$**.**

ב. נתון כי הפונקציה $f(x)$ **היא זוגית, כלומר** $f(x)=f(-x)$ **.**

כיוון שכל החזקות של x **זוגיות, למעט פעם אחת (** bx **) הרי ש-** $b=0$**.**

ובאופן קצת יותר מסודר:

$$f(-x)=f(x)$$

$$\frac{(-x)^2+b(-x)-c}{(-x)^2-4}=\frac{x^2+bx-c}{x^2-4}$$

$$\frac{x^2-bx-c}{x^2-4}=\frac{x^2+bx-c}{x^2-4}$$

$$x^2-bx-c=x^2+bx-c$$

$$-2bx=0$$

$$\boxed{b=0}$$

תשובה: $b=0$ **.**

ג. נציב $b=0$ **ונקבל** $f(x)=\frac{x^2-c}{x^2-4}$ **.**

נתון כי לגרף הפונקציה $f(x)$ **יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה-** x **, בין שתי האסימפטוטות האנכיות שלה.**

תחום ההגדרה הוא $x\neq \pm 2$**, כעשר מספרים אלו אינם מאפסים את המונה,**

ולכן הישרים $x=2$ **ו-** $x=-2$ **הם האסימפטוטות האנכיות לגרף הפונקציה,**

ושתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x **הן בין** $x=2$ **ל-** $x=-2$**.**

$$f(x)=0 \quad \to x^2-c=0 \quad \to x=\pm\sqrt{c} \quad \to c>0$$

$$-2<\pm\sqrt{c}<2$$

$$\sqrt{c}<2 \quad \to c<4 \quad \to \boxed{0<c<4}$$

תשובה: $0<c<4$**.**

ד. (1) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-c}{x^2-4}$, ונקבע את סוגה.

כיוון שהפונקציה זוגית, והמשמעות היא שהגרף סימטרי לציר ה- y ,

הרי שבהכרח נקודת הקיצון תהייה על ציר זה !!!

יחד עם זאת, נגזור (מה שבטוח).

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-4)-2x(x^2-c)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-4-x^2+c)}{(x^2-4)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2(c-4)x}{(x^2-4)^2}}$$

$$x=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,\frac{c}{4})}$$

הביטוי $c-4$ הוא שלילי, כיוון ש- $0<c<4$.

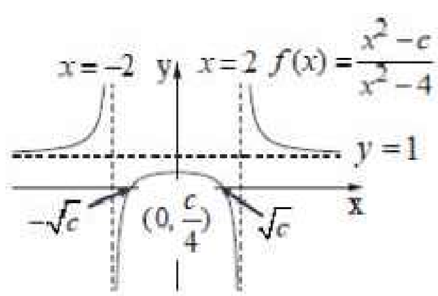
שהמונה של הנגזרת הוא פונקציה קווית יורדת, שעוברת מחיוביות לשליליות, עבור $x=0$.

ולכן, הפונקציה עוברת מעלייה לירידה, ו- $(0,\frac{c}{4})$ היא נקודת מקסימום.

תשובה: $(0,\frac{c}{4})$ מקסימום.

(2) חזקות המונה והמכנה שוות זו לזו (פולינום ריבועי), לכן הגבול של ערכי הפונקציה הוא מנת המקדמים.

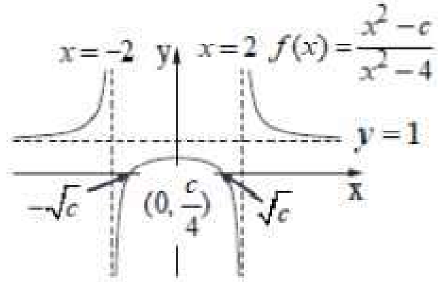
$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-c}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{c}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-0}{1-0}=1$ **, והאסימפטוטה האופקית היא $y=1$.**

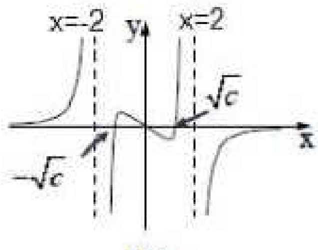


תשובה: האסימפטוטה אופקית היא $y=1$, הסקיצה הובאה גם .

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$, המוגדרת בתחום של הפונקציה הנתונה והנגזרת שלה.

ניעזר בסקיצה של $f(x)$ על-מנת לבחור את הגרף המתאים, מבין השלושה הנתונים.

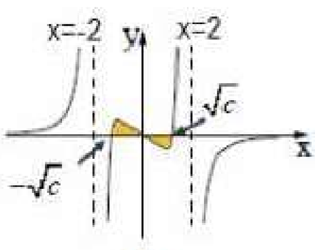




III

(1) שיקולים לבחירת הגרף המתאים

- $f(x)$ **חיובית, כאשר הגרף מעל לציר ה-** x **, עבור:** $x>2$ **, או** $-\sqrt{c}<x<\sqrt{c}$ **, או** $x<-2$
- $f(x)$ **שלילית, כאשר הגרף מתחת לציר ה-** x **, עבור:** $\sqrt{c}<x<2$ **, או** $-2<x<-\sqrt{c}$
- $f'(x)$ **חיובית, כאשר הגרף שלה עולה , כלומר עבור:** $-2<x<0$ **, או** $x<-2$
- $f'(x)$ **שלילית, כאשר הגרף שלה יורד , כלומר עבור:** $x>2$ **, או** $0<x<2$
- $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$ **תהייה חיובית, כאשר** $f(x)$ **ו-** $f'(x)$ **חיוביות, או כאשר שתיהן שליליות.**
- $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$ **תהייה שלילית, כאשר** $f(x)$ **ו-** $f'(x)$ **בסימנים מנוגדים.**
- **<u>ולבחירה המתאימה</u>**
  - **כבר עבור** $x>2$ **ניתן לראות שגרף** I **ו-** II **נפסלים כי** $f(x)$ **חיובית ויורדת,**
    ולכן $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$ **שלילית – מתאים רק לגרף** III .
  - **עבור** $\sqrt{c}<x<2$ **:** $f(x)$ **שלילית ויורדת, ולכן** $g(x)$ **חיובית –מתאים לגרף** III .
  - **עבור** $0<x<\sqrt{c}$ **:** $f(x)$ **חיובית ויורדת, ולכן** $g(x)$ **שלילית –מתאים לגרף** III .
  - **עבור** $-\sqrt{c}<x<0$ **:** $f(x)$ **חיובית ועולה, ולכן** $g(x)$ **חיובית**
  - **עבור** $-2<x<-\sqrt{c}$ **:** $f(x)$ **שלילית ועולה, ולכן** $g(x)$ **שלילית**
  - **עבור** $x<-2$ **:** $f(x)$ **חיובית ועולה, ולכן** $g(x)$ **חיובית**



III

תשובה: גרף III **הוא גרף הפונקציה** $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$.

(2) $g(-x)=f(-x)\cdot f'(-x)=f(x)(-f'(x))=-f(x)\cdot f'(x)=-g(x)$

ולכן $g(x)$ **פונקציה אי-זוגית ושני השטחים המסומנים שווים זה לזה.**

$$S=2\cdot\int_{-\sqrt{c}}^{0}\left[g(x)-0\right]dx=2\cdot\int_{-\sqrt{c}}^{0}\left[f(x)f'(x)\right]dx=2\cdot\frac{f^2(x)}{2}\Bigg]_{-\sqrt{c}}^{0}=$$

$$=f^2(0)-f^2(-\sqrt{c})=(-\frac{c}{4})^2-(0)^2=\boxed{\frac{c^2}{16}}$$

תשובה: השטח הוא $\frac{c^2}{16}$ **.**