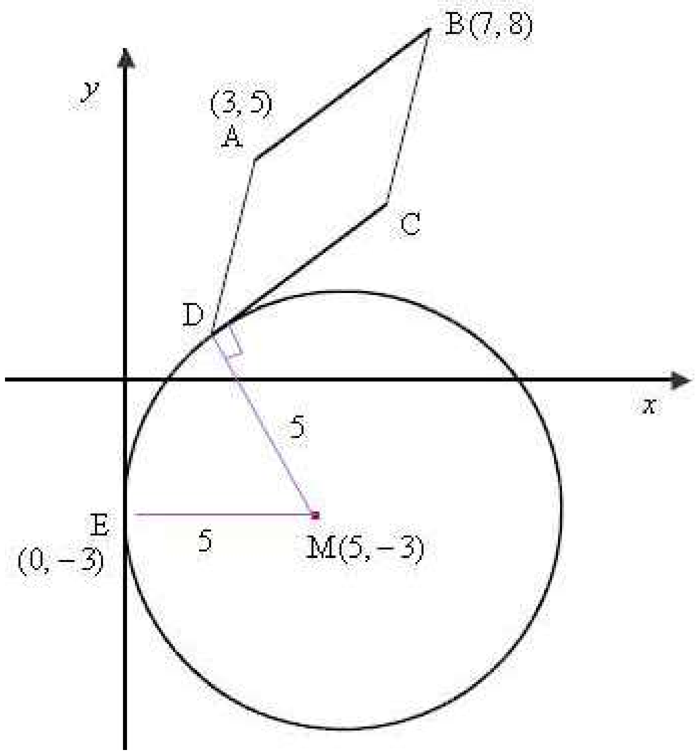


א. שטח מקבילית שווה למכפלת צלע בגובה שלה

$$AB=\sqrt{(8-5)^2+(7-3)^2}=\sqrt{25}=5$$

$$13=5h_{AB}\quad\rightarrow h_{AB}=2.6$$

אורך הגובה שווה למרחק בין שתי צלעות המקבילית

$$m_{AB}=\frac{8-5}{7-3}=0.75$$

$$AB\equiv y-8=0.75(x-7)$$

$$AB\equiv -0.75x+y-2.75$$

נשים לב לכך שהצלע המבוקשת מתחת לצלע

שאת משוואתה מצאנו, כאשר המקדם של y **חיובי .**

$$2.6=\frac{c_{CD}+2.75}{\sqrt{(-0.75)^2+1^2}}$$

$$c_{CD}=0.5$$

$$CD\equiv -0.75x+y+0.5=0$$

תשובה: $CD\equiv -0.75x+y+0.5=0$

ב. המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה, ולכן מרחק הנקודה M **מהמשיק** DC **שווה ל-** 5 **.**

נשים לב לכך שהנקודה מתחת לישר, וכן המרחק "שלילי", כאשר המקדם של y **חיובי**

כמו כן, שיעור ה- x **של הנקודה** M **הוא** 5**, כ המעגל משיק לציר ה-** y **.**

$$5=-\frac{-0.75\cdot 5+y+0.5}{\sqrt{(-0.75)^2+1^2}}$$

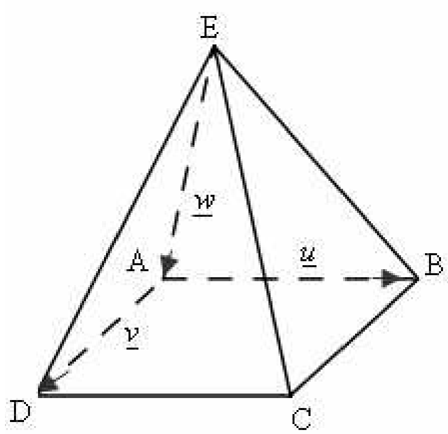
$$-6.25=-3.25+y$$

$$y=-3$$

בהתאם שיעורי מרכז המעגל הם $M(5,-3)$ **ונקודת ההשקה** $E(0,-3)$

תשובה: $(0,-3)$

א. נסמן $\overrightarrow{AB}=\underline{u},\quad \overrightarrow{AD}=\underline{v},\quad \overrightarrow{EA}=\underline{w}$



נתון כי $\overrightarrow{EA}\perp\overrightarrow{EC}$ **ובהתאם** $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC}=0$

$$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC}=0\quad\rightarrow\overrightarrow{EA}\cdot(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=0\quad\rightarrow\underline{w}\cdot(\underline{w}+\underline{u}+\underline{v})=0$$

הבסיס ABCD **הוא מלבן** $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$ **.**

יש להוכיח כי $\overrightarrow{ED}\perp\overrightarrow{EB}$ **, כלומר** $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EB}=0$

$$\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EB}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB})$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EB}=(\underline{w}+\underline{v})\cdot(\underline{w}+\underline{u}\cancel{+\underline{v}}\cancel{-\underline{v}})$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EB}=\underline{w}\underline{w}+\underline{w}\underline{u}+\underline{v}\underline{w}+\underline{v}\underline{u}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EB}=\underline{w}\cdot\left(\underline{w}+\underline{u}+\underline{v}\right)=0$$

כיוון ש: $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EB}=0$ **הרי שהוכחנו את הטענה.**

ב. יש להוכיח את הטענה הבאה:

אם כל זוג מקצועות צדדים נגדיים בפירמידה ABCDE **, שבסיסה** ABCD **הוא מקבילית, מאונכים זה לזה, הרי שבסיסה** ABCD **הוא מלבן.**

יש להוכיח כי $\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{CD}$ **, כלומר** $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

נתון כי $\overrightarrow{EB}\perp\overrightarrow{ED}$ **ובהתאם** $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}=0$

$$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}=0\quad\rightarrow(\underline{w}+\underline{u})\cdot(\underline{w}+\underline{v})=0$$

וגם על פי סעיף א $\underline{w}\cdot(\underline{w}+\underline{u}+\underline{v})=0$

$$\begin{cases}(\underline{w}+\underline{u})\cdot(\underline{w}+\underline{v})=0\\ \underline{w}\cdot(\underline{w}+\underline{u}+\underline{v})=0\end{cases}$$

$$-\begin{cases}\underline{w}\underline{w}+\underline{w}\underline{v}+\underline{u}\underline{w}+\underline{u}\underline{v}=0\\ \underline{w}\underline{w}+\underline{w}\underline{u}+\underline{w}\underline{v}=0\end{cases}$$

$$\boxed{\underline{u}\underline{v}=0}$$

לכן $\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{CD}$ **ומקבילית הבסיס** ABCD **היא מלבן.**

נתון מקום גיאומטרי המקיים: $|z-\overline{z}+i|=|3z+\overline{z}-i|$ **,** $z=x+yi$

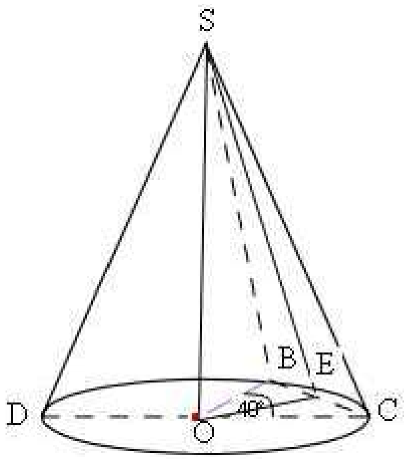
$$|z-\overline{z}+i|=|3z+\overline{z}-i|$$
$$|x+yi-(x-yi)+i|=|3(x+yi)+x-yi-i|$$
$$|x+yi-x+yi+i|=|3x+3yi+x-yi-i|$$
$$|(2y+1)i|=|4x+(2y-1)i|$$
$$\sqrt{(2y+1)^2}=\sqrt{16x^2+(2y-1)^2}$$
$$4y^2+4y+1=16x^2+4y^2-4y+1$$
$$8y=16x^2$$
$$\boxed{y=2x^2}$$

העלינו, במהלך הפתרון, שני אגפים בריבוע – וזה אפשרי, שכן שני הביטויים שבתוך השורש אינם שליליים.

קיבלנו פרבולה בעלת מינימום, שקדקודה בראשית הצירים $(0,0)$ **,**

ובהתאם המשיק הוא ציר ה- x **ומשוואתו** $y=0$ **.**

תשובה: $y=0$



הזווית בין המישור SBC **למישור של בסיס החרוט היא** $\angle SEO$
שבין SE **- האנך לישר החיתוך** BC **מ-** ΔSBC **(שהוא מש"ש),**
לבין OE **- האנך ממרכז המעגל במש"ש** ΔOBC **.**
שני האנכים נפגשים בנקודה E**, כיוון ששני המשולשים שווי שוקיים ואנך לבסיס במש"ש הוא גם תיכון לבסיס, וגם חוצה זווית הראש.**
נסמן $OE = x$ **.**

$\underline{\Delta SEO}$

$$\tan\angle SEO = \frac{SO}{EO}$$

$$x\tan 55° = SO$$

$$\boxed{SO = 1.428x}$$

$$\angle EOC = \frac{\angle BOC}{2} = \frac{40°}{2} = 20°$$

$\underline{\Delta EOC}$

$$\cos\angle EOC = \frac{OE}{OC}$$

$$OC = \frac{x}{\cos 20°}$$

$$\boxed{OC = 1.064x}$$

$\underline{\Delta SOC}$

$$\tan\angle OSC = \frac{OC}{OS}$$

$$\tan\angle OSC = \frac{1.064x}{1.428x}$$

$$\boxed{\angle OSC = 36.69°}$$

$$\angle DSC = 2\cdot\angle OSC = 2\cdot 36.69° = 73.37°$$

תשובה: גודל הזווית DSC **הוא** $73.37°$**.**

נוסחת הגידול והדעיכה היא $M_t = M_0 \cdot q^t$

שעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן הוא q. **פרק הזמן הוא** t.

M_0 **- הכמות ראשונית ,** M_t **- כמות לאחר** t **תקופות.**

בשעה 8^{00} **היו** 100 **גרם של חומר רדיואקטיבי** I **ו-** 100 **גרם של חומר רדיואקטיבי** II **.**

כעבור חצי שעה נותרו 80 **גרם של חומר** I **ו-** 64 **גרם של חומר** II **.**

בהתאם, בתקופות זמן של חצאי שעות: $q_{\mathrm{I}} = 0.8, q_{\mathrm{II}} = 0.64$ **,**

ברור שמחומר I **תישאר כמות חומר יותר גדולה, שכן קצב הדעיכה שלו נמוך יותר.**

המשוואה המבוקשת היא : $100 \cdot 0.8^t - 100 \cdot 0.64^t = 25$

$$100 \cdot 0.64^t - 100 \cdot 0.8^t + 25 = 0$$
$$4 \cdot 0.64^t - 4 \cdot 0.8^t + 1 = 0$$
$$(2 \cdot 0.8^t - 1)^2 = 0$$
$$2 \cdot 0.8^t - 1 = 0$$
$$2 \cdot 0.8^t = 1$$
$$0.8^t = 0.5$$
$$\ell n\, 0.8^t = \ell n\, 0.5$$
$$t \ell n\, 0.8 = \ell n\, 0.5$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{\ell n\, 0.5}{\ell n\, 0.8}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{t \approx 3.106}$$

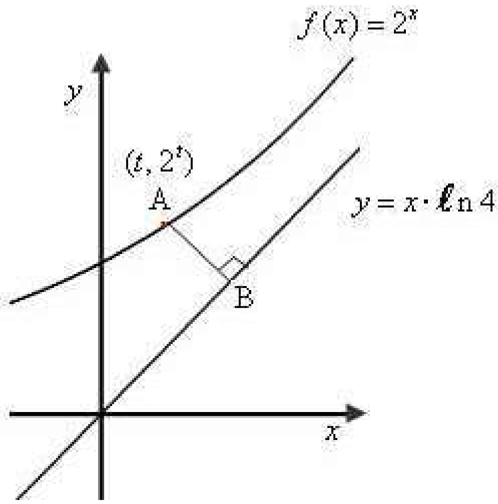
ולכן כעבור 3.106 **חצאי שעות, או** 1.55 **שעות , יהיה ההפרש בין כמויות** 25 **גרם**

תשובה: כעבור 1.55 **שעות יהיה ההפרש בין כמויות שני החומרים** 25 **גרם.**

נסמן $A(t,2^t)$ **נקודה על גרף הפונקציה** $f(x)=2^x$ **, שהיא פונקציה עולה לכל** x **.**

הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא *המרחק* בין הנקודה לישר $y=x\cdot\ell n4$

מרחק זה יהיה מינימלי, כאשר AB **יהיה מאונך לישר** $y=x\cdot\ell n4$ **, או** $-x\cdot\ell n4+y=0$



$$AB=\frac{-t\cdot\ell n4+2^t}{\sqrt{(-\ell n4)^2+1}}$$

$$\boxed{AB=\frac{-t\cdot\ell n4+2^t}{\sqrt{1+\ell n^2 4}}}$$

$$\boxed{(AB)'=\frac{-\ell n4+2^t\ell n2}{\sqrt{1+\ell n^2 4}}}$$

$$0=\frac{-\ell n4+2^t\ell n2}{\sqrt{1+\ell n^2 4}}$$

$$2^t\ell n2=\ell n4$$

$$2^t=\frac{\ell n2^2}{\ell n2}$$

$$2^t=\frac{2\ell n2}{\ell n2}$$

$$t=1 \quad \to x_A=1 \quad \to y_A=2^1=2$$

$$(AB)''=\frac{2^t\ell n^2 2}{\sqrt{1+\ell n^2 4}}>0 \quad \to Min$$

$$\boxed{A(1,2)}$$

תשובה: הנקודה $(1,2)$ **, שעל גרף הפונקציה** $f(x)=2^x$ **, היא הנקודה הקרובה ביותר לישר** $y=x\cdot\ell n4$

כיוון שהפונקציה $f(x)=\frac{\ell n(ax)}{x}$ **,** $a>1$ **נגדית לפונקציה** $g(x)=-\frac{\ell n(ax)}{x}$**, הרי ששתי הפונקציות סימטריות לציר ה-** x**, כלומר ששיעורי ה-** x **של נקודות הקיצון והפיתול יהיו שווים, והשטח המוגבל בשאלה - שווה לפעמיים השטח המוגבל על ידי הישר, על ידי הגרף של** $f(x)=\frac{\ell n(ax)}{x}$ **הישר** $x=e$**, וציר ה-** x**.**

נמצא את ששיעורי ה- x **של נקודות הקיצון:**

$$f'(x)=\frac{\frac{ax}{ax}-\ell n(ax)}{x^2}$$

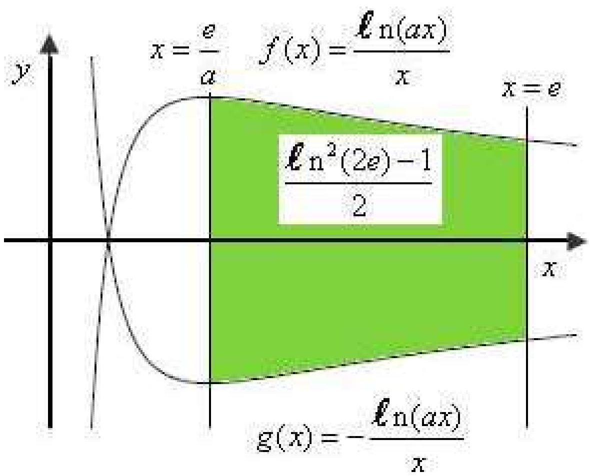
$$\boxed{f'(x)=\frac{1-\ell n(ax)}{x^2}}$$

$$0=1-\ell n(ax)\quad\rightarrow \ell n(ax)=1\quad\rightarrow ax=e\quad\rightarrow x=\frac{e}{a}$$

$$f'(\frac{0.5e}{a})=1-\ell n(0.5e)=-\ell n\,0.5>0,\ f'(\frac{2e}{a})=1-\ell n(0.5e)=-\ell n\,2<0\quad\rightarrow Max$$

כלומר משוואת הישר המחבר את שתי נקודות הקיצון (עבור $g(x)$ **נקודת מינימום) היא** $x=\frac{e}{a}$

נחשב את האינטגרל תוך כדי זיהוי הנגזרת הפנימית, של הביטוי במונה.



$$\frac{\ell n^2(2e)-1}{2}=\int_{\frac{e}{a}}^{e}(\ell n(ax)\cdot\frac{1}{x})\,dx$$

$$\frac{\ell n^2(2e)-1}{2}=\frac{\ell n^2(ax)}{2}\Big]_{\frac{e}{a}}^{e}$$

$$\ell n^2(2e)-1=\ell n^2(ae)-(\ell n^2(e))$$

$$\ell n^2(2e)=\ell n^2(ae)$$

$$\ell n(2e)=\ell n(ae)\quad or\qquad \ell n(2e)=-\ell n(ae)=\ell n(ae)^{-1}$$

$$2e=ae\qquad\qquad 2e=\frac{1}{ae}$$

$$\boxed{a=2}\qquad\qquad \cancel{a=\frac{1}{2e^2}}\quad a>1$$

נציב $a=2$ **ונקבל את הפונקציה** $f(x)=\frac{\ell n(2x)}{x}$

נמצא את שיעור ה- x **של נקודת הפיתול**

(למעשה, כמוסבר בראשית התרגיל, של נקודות הפיתול של שתי הפונקציות)

$$f'(x)=\frac{\frac{2x}{2x}-\ell n(2x)}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1-\ell n(2x)}{x^2}}$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{2x^2}{2x}-2x\,(1-\ell n(2x))}{x^4}$$

$$f''(x)=\frac{-x-2x+2x\ell n(2x))}{x^4}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{-3x+2x\ell n(2x)}{x^4}}$$

$$0=-3x+2x\ell n(2x)$$

$$\ell n(2x)=\frac{3}{2}$$

$$2x=e^{\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{x=0.5\sqrt[2]{e^3}}\quad (x=2.241)$$

$$f''(2.2)=-3\cdot 2.2+2\cdot 2.2\ell n(2\cdot 2.2)=-0.008<0\quad \to\cap$$

$$f''(2.4)=-3\cdot 2.4+2\cdot 2.4\ell n(2\cdot 2.4)=0.329>0\quad \to\cup$$

עבור $x=0.5\sqrt[2]{e^3}$ **הפונקציה משנה תחומי קעירות ולכן זו נקודת פיתול.**

תשובה: משוואת הישר העובר דרך נקודות הפיתול הוא $x=0.5\sqrt[2]{e^3}$