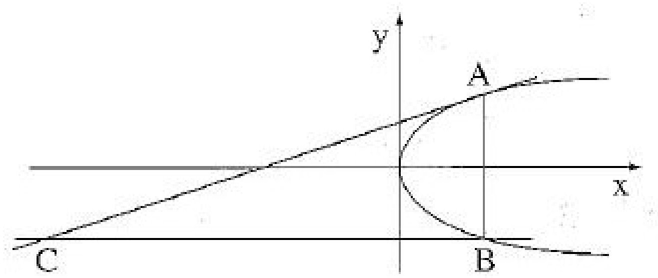
א. (1) נסמן $C(s,t)$ נקודה על המקום הגיאומטרי .



$y_B = y_C = t$ **, שכן** BC **מקביל לציר ה-** x **והמשוואה שלו** $y = t$ **.**

B **על הפרבולה** $y^2 = 2px$ **ולכן שיעוריה** $B(\frac{t^2}{2p}, t)$ **.**

$x_A = x_B$ **, שכן** AB **מקביל לציר ה-** y **,**

ועקב הסימטריות של הפרבולה לציר ה- x **, שיעורי הנקודה** $A(\frac{t^2}{2p}, -t)$ **.**

משוואת משיק לפרבולה $y^2 = 2px$ **:** $yy_0 = p(x + x_0)$

ובהתאם השיפוע $m = \frac{p}{y_0}$ **, לכן:** $m_{AC} = \frac{p}{-t}$

$$\frac{-p}{t} = \frac{-t-t}{\frac{t^2}{2p} - s}$$

$$\frac{-p}{t} = \frac{-2t}{\frac{t^2 - 2sp}{2p}}$$

$$\frac{-p}{t} = \frac{-4tp}{t^2 - 2sp}$$

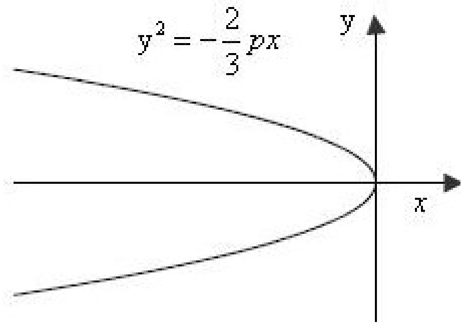
$$t^2 - 2sp = 4t^2$$

$$3t^2 = -2sp$$

$$\boxed{y^2 = -\frac{2}{3}px}$$

תשובה: $y^2 = -\frac{2}{3}px$

(2) הסרטוט המתאים:



ב. נתון כי שיעור ה- y **של נקודה** C**, הנמצאת על המקום הגיאומטרי** $y^2=-\frac{2}{3}px$**, הוא** $y=-2p$ **.**

על פי הסעיף הקודם שיעור ה- y **בנקודת ההשקה הוא נגדי לשיעור ה-** y **בנקודה** C

ולכן: $m_{AC}=\frac{p}{-t}=\frac{p}{-(-2p)}=0.5$

השיפוע של המשיק חיובי, שכן המשיק עולה,

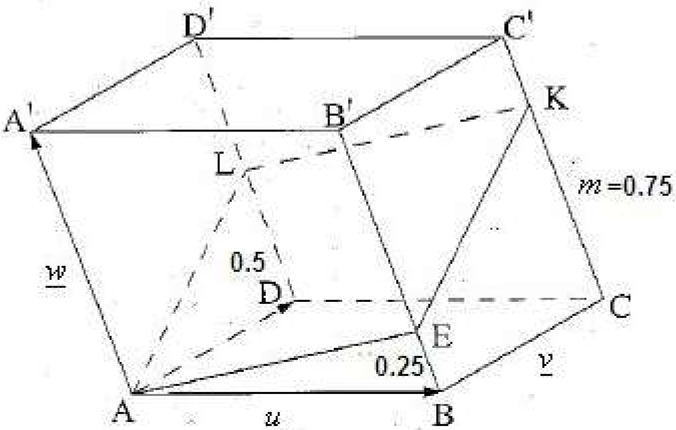
כאשר הוא שווה ל $\tan$ **של הזווית בינו לבין הכיוון החיובי של ציר ה-** x

$\tan\alpha=0.5$

$\alpha=26.565°$

תשובה: הזווית שבין המשיק לפרבולה, CA**, ובין ציר ה-** x **היא בת** $26.565°$

עא ינואר 11 מועד חורף שאלון 35807



א. נתון כי L היא אמצע המקצוע DD' ,

ו- E נמצאת על המקצוע BB' , כך ש- $\frac{B'E}{BE}=3$.

$\overrightarrow{CK}=m\,\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$

ובהתאם: $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\underline{w}$, $\overrightarrow{DL}=\frac{1}{2}\underline{w}$, $\overrightarrow{CK}=m\,\underline{w}$

המקצוע AA' מאונך למישור AEL , לכן

יוצר זווית ישרה עם כל וקטור במישור AEL .

$$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AL}=0 \quad \rightarrow \underline{w}(\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w})=0 \quad \rightarrow \underline{w}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}^2=0$$

$$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{EK}=0 \quad \rightarrow \underline{w}[\underline{v}+(m-\frac{1}{4})\underline{w}]=0 \quad \rightarrow \underline{w}\underline{v}+(m-\frac{1}{4})\underline{w}^2=0$$

$$\frac{1}{2}\underline{w}^2-(m-\frac{1}{4})\underline{w}^2=0 \quad / \div\underline{w}^2 \left(\underline{w}^2\neq 0\right)$$

$$\frac{1}{2}-m+\frac{1}{4}=0$$

$$\boxed{m=\frac{3}{4}}$$

תשובה: $m=\frac{3}{4}$

ב. ההצגה הפרמטרית של הישר CC' היא $\underline{x}=(4,5,8)+t(1,-1,2)$, כאשר הנקודה $(2,-1,3)$ נמצאת במישור AEL .

משוואת המישור AEL , שהנורמל שלו הוא $\underline{x}=(1,-1,2)$ היא $\pi: x-y+2z+d=0$

נציב את שיעורי הנקודה $(2,-1,3)$ ונקבל: $2-(-1)+2\cdot 3+d=0 \quad \rightarrow d=-9$

ולכן משוואת המישור AEL היא $\pi: x-y+2z-9=0$

שיעורי הקדקוד C' הם $(x,y,0)$, כאשר נקודה טיפוסית על הישר CC' היא $(4+t,5-t,8+2t)$

עבור $z_C=0$ נקבל $8+2t=0$ ומכאן ש- $t=-4$ ושיעורי הקדקוד C' הם $(0,9,0)$

נמצא את מרחק הקדקוד C' מהמישור $\pi: x-y+2z-9=0$

$$d=\frac{|-9-9|}{\sqrt{1^1+(-1)^2+2^2}}=\frac{18}{\sqrt{6}}=3\sqrt{6}$$

הנקודה K היא נקודת החיתוך של המקצוע CC' עם המישור AEL , כאשר מקצוע זה מאונך לו.

כיוון ש $\overrightarrow{CK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CC'}$, הרי ש- $\overrightarrow{CK}=3\,\overrightarrow{C'K}$ ומכאן שהמרחק הקדקוד C מהמישור AEL הוא $3\cdot 3\sqrt{6}=9\sqrt{6}$

תשובה: מרחק הקדקוד C מהמישור AEL הוא $9\sqrt{6}$.

נכתב ע"י עפר ילין

א. z_1 , z_2 ו- z_3 **הם שלושה מספרים מרוכבים שונים הנמצאים על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים.**

z_1 ו- z_2 **נמצאים ברביע הראשון, ו-** z_3 **נמצא ברביע השלישי.**

נסמן $z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ **.**

כיוון ש- z_1 , z_2 **ברביע הראשון ונמצאים על ישר העובר בראשית הצירים, הרי שהארגומנטים שלהם שווים,**
אך הרדיוסים (הערכים המוחלטים) שונים, כי נתון שהם מספרים שונים. בהתאם: $z_2 = r_2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ **.**

z_3 **נמצא ברביע השלישי, על אותו ישר העובר בראשית הצירים, לכן** $z_3 = r_3(\cos(\alpha+180°) + i\sin(\alpha+180°))$ **,**
כאשר ייתכן כי הרדיוס של z_3 **שווה לזה של** z_1 **או** z_2 **.**

נעבד את ההצגה הטריגונומטרית של $\arg(z_3)$ **,**

תוך שימוש בזהויות $\sin(\alpha+180°) = -\sin\alpha, \cos(\alpha+180°) = -\cos\alpha$

$$(\cos(\alpha+180°) + i\sin(\alpha+180°)) =$$
$$(-\cos\alpha - i\sin\alpha) =$$
$$-(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha) - (r_3(\cos(\alpha+180°) + i\sin(\alpha+180°))}{r_2(\cos\alpha + i\sin\alpha) - (r_3(\cos(\alpha+180°) + i\sin(\alpha+180°))}$$
$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)(r_1 + r_3)}{(\cos\alpha + i\sin\alpha)(r_2 + r_3)}$$
$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{r_1 + r_3}{r_2 + r_3}$$

רדיוס הוא מספר ממשי, לכן המנה היא מספר ממשי.

תשובה: המנה $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ **היא מספר ממשי.**

ב. נתון גם כי z_1 **ו-** z_3 **נמצאים על מעגל היחידה, כלומר** $r_1 = r_3 = 1$ **, ו-** $\left|\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right| = \frac{1}{2}$ **.**

$$\frac{r_1 + r_3}{r_2 + r_3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1+1}{r_2 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$4 = r_2 + 1$$

$$\boxed{r_2 = 3}$$

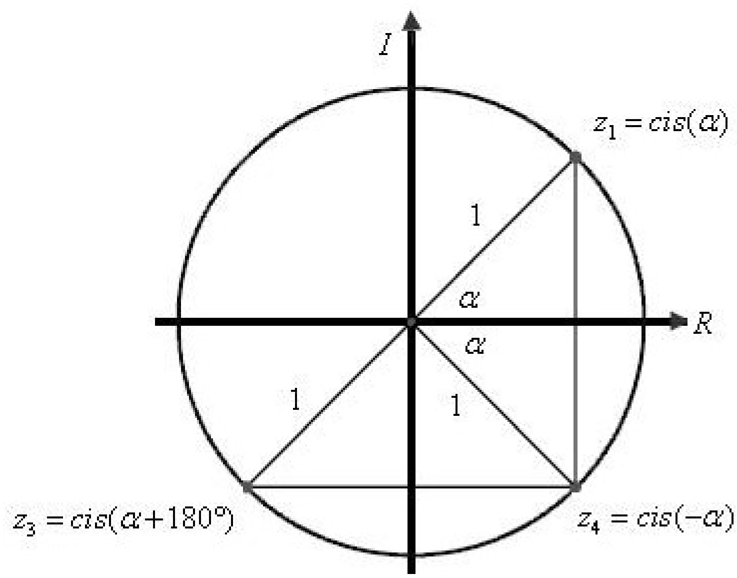
$$\boxed{|z_2| = 3}$$

תשובה: $r_2 = |z_2| = 3$

ג. z_4 **הוא הצמוד של** z_1 **, כלומר** $z_1 = cis(\alpha) \quad \to z_4 = cis(-\alpha)$

עפ"י סעיף ב הנתון על המצאות גם של z_3 **על מעגל היחידה, הרי ש-** $z_3 = cis(\alpha + 180°)$

נצייר את המשולש הנוצר על ידי הנקודות z_1 **,** z_3 **ו-** z_4 **.**



שטח המשולש הנוצר על ידי z_1 **,** z_4 **ראשית הצירים, שווה לחצי משטח המשולש המבוקש, כי** Oz_4 **הוא תיכון.**

לכן $S = 2 \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin 2\alpha}{2} = \sin 2\alpha$

תשובה: שטח המשולש הנוצר על ידי הנקודות z_1 **,** z_3 **ו-** z_4 **הוא** $\sin 2\alpha$ **יח"ר.**

נתונות שלוש פונקציות, I , II , III :

$$\mathrm{I.}\quad y=-2x+4 \qquad \mathrm{II.}\quad y=\ell nx \qquad \mathrm{III.}\quad y=\ell nx+2x-4$$

א. הפונקציה $y=-2x+4$ $\mathrm{I.}$ **מוגדרת לכל** x **, יורדת לכל** x **וכמובן אין לה אסימפטוטות המקבילות לצירים.**

הפונקציה $y=\ell nx$ $\mathrm{II.}$ **מוגדרת עבור** $x>0$ **וגם הפונקציה** $y=\ell nx+2x-4$ $\mathrm{III.}$ **מוגדרת עבור** $x>0$ **.**

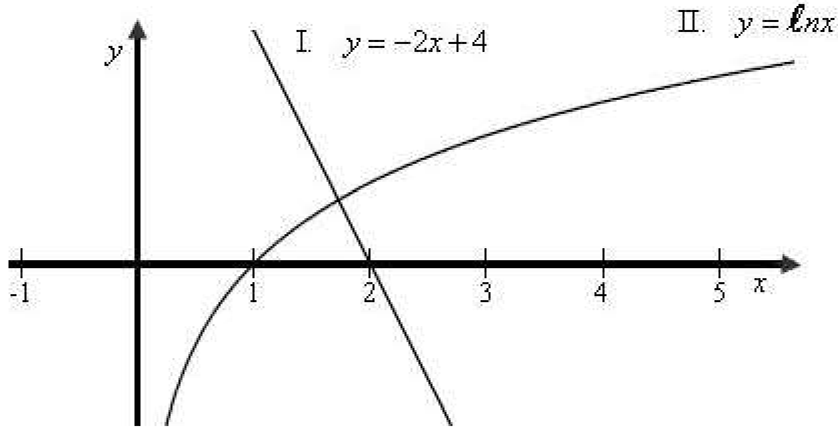
$\lim\limits_{x\to 0^+}\ell nx=-\infty$ **ולכן** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית, כאשר** $\lim\limits_{x\to\theta}\ell nx=\infty$ **ואין אסימפטוטה אופקית.**

ב. (1) נגזרת הפונקציה $y=\ell nx$ $\mathrm{II.}$ **היא** $y'=\dfrac{1}{x}$ **, שהיא חיובית בתחום ההגדרה** $x>0$ **ולכן הפונקציה עולה,**

והנגזרת השנייה $y'=-\dfrac{1}{x^2}$ **שלילית ולכן הפונקציה קעורה כלפי מטה בתחום ההגדרה** $x>0$ **.**

הפונקציה חותכת את הצירים בנקודות $(1,0)$, $(0,1)$ **.**

הפונקציה $y=-2x+4$ $\mathrm{I.}$ **היא פונקציה קווית יורדת החותכת את הצירים בנקודות** $(2,0)$, $(0,4)$



(2) נקודת החיתוך בין הגרפים של הפונקציות I **ו-** II **חייבת להימצא בתחום** $1<x<2$ **,**

כי עבור $x=1$ **ערך הפונקציה** I **גדול מזה של** II **ועבור** $x=2$ **ערך הפונקציה** I **קטן מזה של** II **,**

כאשר פונקציה אחת יורדת והשנייה עולה,

ובהתאם בתחום $1<x<2$ **ימצא שיעור ה-** x **עבורו ערכי הפונקציות שווים.**

ג. (1) נגזרת הפונקציה $y=\ell nx+2x-4$ $\mathrm{III.}$ **היא** $y'=\dfrac{1}{x}+2$ **, שהיא חיובית בתחום ההגדרה** $x>0$

ולכן הפונקציה עולה והנגזרת השנייה $y'=-\dfrac{1}{x^2}$ **שלילית ולכן הפונקציה קעורה כלפי מטה**

בתחום ההגדרה $x>0$ **.**

תשובה: ירידה – אף x **, עלייה** $x>0$

(2) נשים לב לכך ש: $y=\ell nx+2x-4=\ell nx-(2x+4)$ .III ,

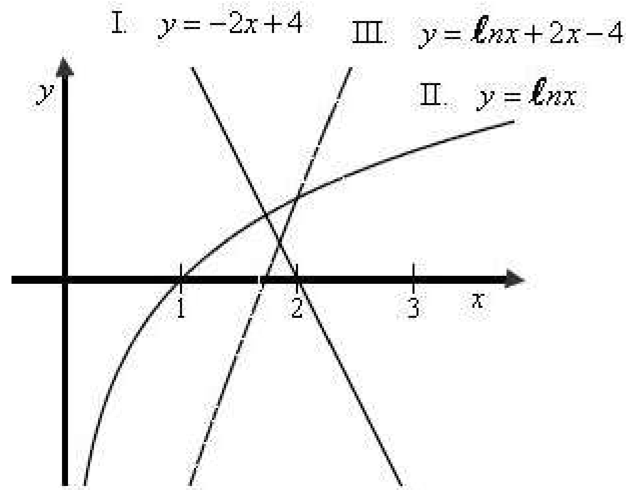
כלומר הפונקציה III היא ההפרש בין הפונקציות II ו- I וכאשר ערכיהן שווים (בתחום $1<x<2$)

ערך הפונקציה III יהיה שווה ל- 0 והיא תחתוך את ציר ה- x .

תשובה :נקודת החיתוך של גרף הפונקציה III עם ציר ה- x תהייה בתחום $1<x<2$

(3) נעדכן את הסקיצה

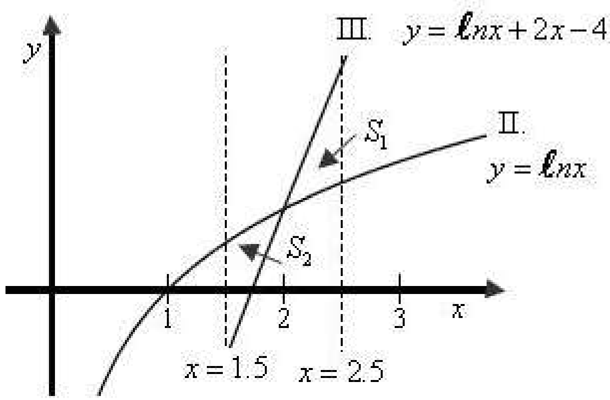
(הערה – מטעמי נוחות של ציור עם המחשב, לא הובעה יפה הקעירות כלפי מטה של $y=\ell nx+2x-4$ .III)



ד. נמצא את שיעור ה- x של נקודת החיתוך בין הפונקציות:

$$\ell nx+2x-4=\ell nx$$
$$2x=4$$
$$x=2$$

$$S_1=\int_2^{2.5}(\ell nx+2x-4-\ell nx)\,dx$$
$$S_1=\int_2^{2.5}(2x-4)\,dx$$
$$S_1=\frac{2x^2}{2}-4x\Big]_2^{2.5}=$$
$$S_1=(2.5^2-4\cdot 2.5)-(2^2-4\cdot 2)=$$
$$S_1=-3.75-(-4)$$
$$\boxed{S_1=0.25}$$



$$S=S_1+S_2=0.25+0.25=\boxed{0.5}$$

נכתב ע"י עפר ילין

תשובה: גודל השטח 0.5 **יח"ר**

$$S_2 = \int_{1.5}^{2.} (\ell nx - (\ell nx + 2x - 4))\, dx$$

$$S_2 = \int_{1.5}^{2} (-2x + 4)\, dx$$

$$S_2 = -\frac{2x^2}{2} + 4x \Big]_{1.5}^{2} =$$

$$S_2 = (-2^2 + 4 \cdot 2) - (-1.5^2 + 4 \cdot 1.5) =$$

$$S_2 = 4 - 3.75$$

$$\boxed{S_2 = 0.25}$$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=(1+x)e^{-x}$ **, המוגדרת לכל** x **.**

$$f'(x)=e^{-x}-(1+x)e^{-x}$$
$$f'(x)=e^{-x}(1-1-x)$$
$$\boxed{f'(x)=-xe^{-x}}$$

תשובה: הוּכַח.

ב. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון:

נגזרת הפונקציה מתאפסת רק עבור $x=0$ **, כי** e^{-x} **חיובי לכל** x **, כאשר** $f(0)=(1+0)e^{-0}=1$ **.**

$$f'(-1)=-(-1)\cdot(+)>0,\quad f'(1)=-1\cdot(+)<0$$

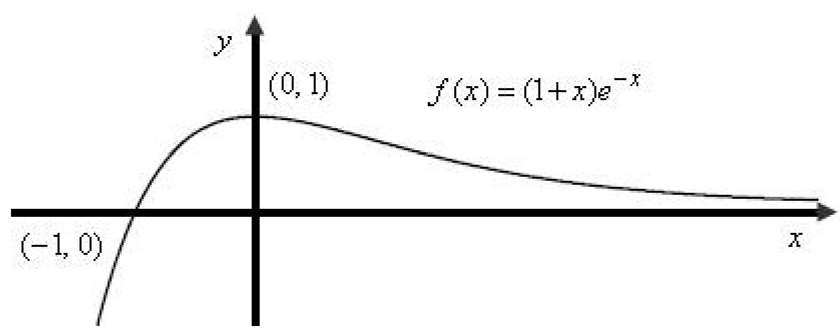
לכן, הפונקציה עוברת מעליה לירידה והנקודה $(0,1)$ **נקודת מקסימום (בחיתוך עם ציר ה-** y **).**

תשובה: $(0,1)$ **נקודת מקסימום.**

ג. $f(x)=(1+x)e^{-x}$ **מקבלת ערך** 0 **רק בנקודה** $(-1,0)$ **שהיא נקודת החיתוך עם ציר ה-** x **.**

תשובה: $(-1,0)$ **,** $(0,1)$

ד. נשים לב כי $\lim_{x\to\infty}(1+x)e^{-x}=0,\ \lim_{x\to-\infty}(1+x)e^{-x}=-\infty$ **ומכאן שהקרן החיובית של ציר ה-** x **אסימפטוטה אופקית.**



ה. נראה כי עבור $a>0$ מתקיים $\int_{-1}^{a} f(x)dx < e$,

כאשר ע"פ סעיף א: $\int -xe^{-x}dx = (1+x)e^{-x}+c$

$$\int_{-1}^{a} f(x)dx = \int_{-1}^{a} (1+x)e^{-x}dx = \int_{-1}^{a} (e^{-x}+xe^{-x})\,dx = -e^{-x}-(1+x)e^{-x}\Big]_{-1}^{a} = -e^{-x}-e^{-x}-xe^{-x}\Big]_{-1}^{a} = -2e^{-x}-xe^{-x}\Big]_{-1}^{a}$$

$$\int_{-1}^{a} f(x)dx = (e^{-x})(-2-x)\Big]_{-1}^{a}$$

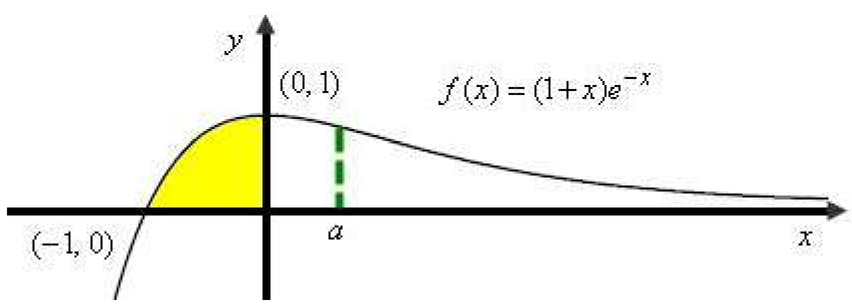
$$\int_{-1}^{a} f(x)dx = e^{-a}(-2-a) - e^{-(-1)}(-2-(-1))$$

$$\int_{-1}^{a} f(x)dx = e^{-a}\underbrace{(-2-a)}_{<0}+e<e$$

הסבר: כיוון ש- $(-2-a)<0$ עבור $a>0$, הרי ש- $e^{-a}(-2-a)$ שלילי אף הוא ולכן $\int_{-1}^{a} f(x)dx < e$

תשובה: הוּכַח

ז. (1) נחשב את השטח המבוקש – הצבוע בצהוב.



$$S = \int_{-1}^{0} f(x)dx = (e^{-x})(-2-x)\Big]_{-1}^{0}$$

$$S = (e^{-0}(-2-0)) - (e^{-(-1)}(-2-(-1)))$$

$$S = -2+e$$

תשובה: גודל השטח $e-2$ יח"ר

(2) כיוון שגרף הפונקציה $f(x)=(1+x)e^{-x}$ מעל לציר ה- x עבור $x>-1$,

הרי שלחשב את האינטגרל המסוים $\int_{-1}^{a} f(x)dx < e$, זה כמו לחבר שני שטחים:

השטח שחשבנו בסעיף (1) $e-2$ יח"ר, ועוד שטח שבהכרח גודלו הוא חיובי (בין ציר ה- y לישר $x=a$),

כאשר סכום השטחים יהיה גדול מ- $e-2$.

לכן, $\int_{-1}^{a} f(x)dx > e-2$, עבור $a>0$.

נכתב ע"י עפר ילין