

א. (1) הנקודה $C(x_1, y_1)$ נמצאת על הפרבולה $y^2 = 4x$ ולכן שיעוריה $C(\frac{y_1^2}{4}, y_1)$.

בצורה דומה, שיעורי הנקודה $D(x_2, y_2)$ שעל הפרבולה הם $D(\frac{y_2^2}{4}, y_2)$.

נחשב את שיפוע המיתר CD :

$$m_{CD} = \frac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2}{4} - \frac{y_1^2}{4}} = \frac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2 - y_1^2}{4}}$$

$$m_{CD} = \frac{4(y_2 - y_1)}{y_2^2 - y_1^2} = \frac{4(y_2 - y_1)}{(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)}$$

$$m_{CD} = \frac{4}{y_2 + y_1}$$

תשובה: הוכח.

(2) הנקודה $(x, 3)$ היא אמצע המיתר CD, לכן על פי נוסחת אמצע קטע $3 = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow y_1 + y_2 = 6$.

$$m_{CD} = \frac{4}{y_2 + y_1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ובהתאם לתת-הסעיף הקודם

$$m_{CD} = \frac{2}{3} \text{ תשובה:}$$

ב. (1) נתון כי מרחק על נקודה על הפרבולה $y^2 = 4x$ מהישר $x = a$ שווה למרחקה מהנקודה $(1, 0)$.

הפרמטר של הפרבולה הוא 2 ולכן המוקד שלה הוא $F(1, 0)$ ומשוואת המדריך $x = -1$.

מרחק נקודה שעל הפרבולה מהמוקד שווה למרחקה מהמדריך, לכן $a = -1$.

תשובה: $a = -1$.

(2) מרחק הנקודה $C(\frac{y_1^2}{4}, y_1)$, שברביע הראשון, מהישר $x = -2$ הוא 6.

$$\frac{y_1^2}{4} - (-2) = 6 \rightarrow y_1^2 = 16 \rightarrow y = 4 \rightarrow \boxed{C(4, 4)}$$

נמצא את משוואת המיתר CD שעובר בנקודה $C(4, 4)$ ושיפועו $m_{CD} = \frac{2}{3}$.

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x - 4)$$

$$\boxed{y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}}$$

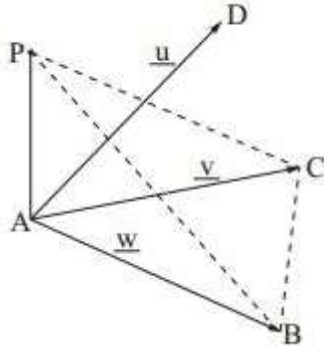
תשובה: משוואת המיתר CD היא $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$.

(בגרות עד פברואר 13 מועד חורף שאלון 35807)

בגרות עד פברואר 14 מועד חורף שאלון 35807

א. $\overline{AB} = \underline{w}$, $\overline{AC} = \underline{v}$, $\overline{AD} = \underline{u}$ כאשר $\angle DAB = 90^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle DAC = 60^\circ$.אם הווקטורים \underline{w} , \underline{v} , \underline{u} היו באותו מישור, אז $\angle DAB = \angle DAC + \angle BAC = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$ ונקבל סתירה לנתון $\angle DAB = 90^\circ$.תשובה: הווקטורים \underline{w} , \underline{v} , \underline{u} לא באותו מישור.

ב. נציג את הנתונים והמשמעויות ונסביר בהמשך.



$$\overline{AD} = \underline{u} \quad |\underline{u}| = 2 \quad \underline{u}^2 = 4$$

$$\overline{AC} = \underline{v} \quad |\underline{v}| = 2 \quad \underline{v}^2 = 4$$

$$\overline{AB} = \underline{w} \quad |\underline{w}| = 2 \quad \underline{w}^2 = 4$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 2 \quad \underline{v} \cdot \underline{w} = 2 \quad \underline{u} \cdot \underline{w} = 0$$

הסבר:

$$\angle DAC = 60^\circ \rightarrow \underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}| \cos 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 2$$

$$\angle BAC = 60^\circ \rightarrow \underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}||\underline{w}| \cos 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 2$$

$$\angle DAB = 90^\circ \rightarrow \underline{u} \cdot \underline{w} = 0$$

נתון כי $\overline{AP} = a\underline{u} + b\underline{v} + \underline{w}$ מאונך למישור ABC ולכן מאונך לכל וקטור במישור.

$$(a\underline{u} + b\underline{v} + \underline{w})\underline{w} = 0$$

$$a\underline{u}\underline{w} + b\underline{v}\underline{w} + \underline{w}^2 = 0$$

$$2b + 4 = 0 \rightarrow \underline{b} = -2$$

$$(a\underline{u} + b\underline{v} + \underline{w})\underline{v} = 0$$

$$a\underline{u}\underline{v} + b\underline{v}^2 + \underline{w}\underline{v} = 0$$

$$2a + 4b = 0 \rightarrow 2a + 4(-2) + 2 = 0 \rightarrow \underline{a} = 3$$

נמצא את האורך של $\overline{AP} = 3\underline{u} - 2\underline{v} + \underline{w}$

$$|\overline{AP}| = \sqrt{9\underline{u}^2 + 4\underline{v}^2 + \underline{w}^2 + 6\underline{u} \cdot \underline{w} - 12\underline{u} \cdot \underline{v} - 4\underline{v} \cdot \underline{w}}$$

$$|\overline{AP}| = \sqrt{9 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 + 6 \cdot 0 - 12 \cdot 2 - 4 \cdot 2} = \sqrt{24}$$

$$|\overline{AP}| = 2\sqrt{6}$$

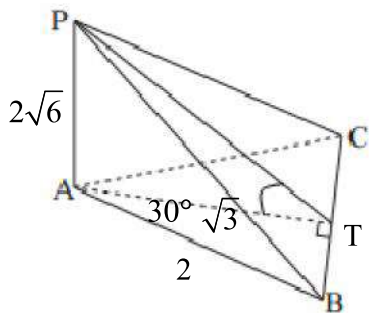
תשובה: $|\overline{AP}| = 2\sqrt{6}$.

ג. גובה לבסיס, ולכן חוצה זווית הראש, במשולש שווה צלעות ABC (זווית ראש 60° במשולש שווה שוקיים...) כיוון ש- AT הוא גם תיכון הרי שגם PT הוא תיכון ל- BC ב- ΔPBC . ΔPBC שווה שוקיים ($\Delta PAC \cong \Delta PAB$) משפט חפיפה צלע זווית צלע, כאשר PT ו- AT אנכים לישר החיתוך BC, ולכן הזווית המבוקשת היא $\sphericalangle PTA$, המתקבלת במשולש ישר הזווית ΔPTA ($\sphericalangle PAT = 90^\circ$).

$$\cos 30^\circ = \frac{AT}{AB} \rightarrow AT = 2 \cos 30^\circ \rightarrow AT = \sqrt{3} : \Delta ABT$$

$$\tan \sphericalangle PTA = \frac{AP}{AT} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \rightarrow \boxed{\sphericalangle PTA = 70.53^\circ} : \Delta PTA$$

תשובה: הזווית בין המישורים היא בת 70.53° .



א. המקום הגיאומטרי של המספרים המרוכבים z מקיים $|z - 12 - 5i| = 7$.

נסמן $z = a + bi$

$$|z - 12 - 5i| = 7$$

$$|a + bi - 12 - 5i| = 7$$

$$|(a - 12) + (b - 5)i| = 7$$

$$\sqrt{(a - 12)^2 + (b - 5)^2} = 7$$

$$(a - 12)^2 + (b - 5)^2 = 49$$

זהו המעגל $(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 49$, שמרכזו בנקודה $(12, 5)$ ורדיוסו 7.

המקום הגיאומטרי של המספרים המרוכבים w מקיים $\arg(w) = 45^\circ$.

כלומר זה הישר, היוצא מהראשית ושיפועו $m = \tan 45^\circ = 1$ ומשוואתו $y = x$ ($x > 0$).

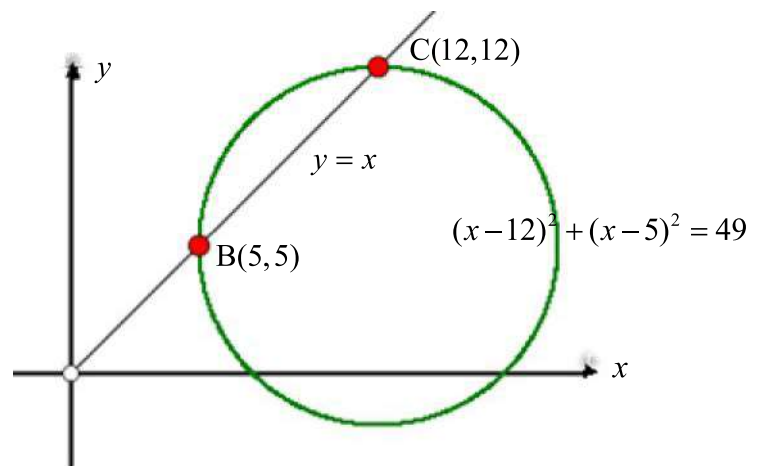
נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של הישר והמעגל.

$$(x - 12)^2 + (x - 5)^2 = 49$$

$$2x^2 - 34x + 120 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{34 \pm 14}{4} \rightarrow \boxed{B(5, 5)}, \quad \boxed{C(12, 12)}$$

הסרטוט המתאים:



ב. $z_1 = r_1 \operatorname{cis} 45^\circ$, $z_2 = r_2 \operatorname{cis} 45^\circ$ (אין צורך לחשב את הערך המוחלט של המספרים, כפי שנראה תכף).

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \operatorname{cis} 45^\circ \cdot r_2 \operatorname{cis} 45^\circ = r_1 \cdot r_2 \operatorname{cis}(45^\circ + 45^\circ)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \operatorname{cis}(90^\circ)$$

תשובה: $\arg(z_1 \cdot z_2) = 90^\circ$.

א. נתונה הפונקציה $f(x) = 2e^{\sqrt{x}}$.

(1) הביטוי בתוך השורש צריך להיות אי-שלילי.

תשובה: $x \geq 0$.

(2) נמצא את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$

(כמו תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה של $f(x)$).

$$f'(x) = \frac{2e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{2x\sqrt{x}}}$$

$$\sqrt{x} - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$f''(0.5) = \frac{(+)(-)}{+} < 0, \quad f''(2) = \frac{(+)(+)}{+} > 0$$

תשובה: עלייה – $x > 1$, ירידה – $0 < x < 1$.

ב. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של פונקציית הנגזרת $y = 2 \cdot f'(x)$.

שיעור ה- x בנקודת הקיצון שווה לזה של $f'(x)$, כלומר $x = 1$ וגם סוג הקיצון (מינימום) אינו משתנה,

כי כפלונו פי 2 (מספר חיובי) את פונקציית הנגזרת.

$$y(1) = 2f'(1) = 2 \cdot \frac{e^{\sqrt{1}}}{\sqrt{1}} = 2e \rightarrow \boxed{(1, 2e)}$$

הפונקציה $y = f(x^2)$ בתחום $x > 0$ היא הפונקציה $y = 2e^{\sqrt{x^2}}$.

נציב $x = 1$ ונקבל $y = 2e^1 = 2e$ ולכן הנקודה $(1, 2e)$ נמצאת גם על הפונקציה $y = f(x^2)$.

תשובה: $(1, 2e)$.

ג. על פי הנתון הפונקציה $y = f(x^2) = 2e^x$ ($x > 0$) והפונקציה $y = 2 \cdot f'(x)$ נפגשות רק בנקודה $(1, 2e)$.

$$\text{עבור } x = 2 \text{ נקבל } y = f(2^2) = 2e^2 = 14.78 \text{ בראשונה ו- } y = 2 \cdot f'(2) = 2 \cdot \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = 5.817$$

כלומר בתחום $x > 1$ היא הפונקציה העליונה. $y = f(x^2) = 2e^x$

נחשב את השטח, שגודלו נתון $8e - 2 \cdot f(a)$, בין שתי הפונקציות והישרים $x = 1$ ו- $x = a$ ($a > 1$).

$$S = \int_1^a (2e^x - 2 \cdot f'(x)) dx =$$

$$S = 2e^x - 2f(x) \Big|_1^a$$

$$S = (2e^a - 2 \cdot f(a)) - (2e^1 - 2 \cdot 2e^{\sqrt{1}})$$

$$\boxed{S = 2e^a - 2 \cdot f(a) + 2e}$$

$$2e^a - 2 \cdot f(a) + 2e = 8e - 2 \cdot f(a)$$

$$2e^a = 6e$$

$$e^a = 3e$$

$$a = \ln 3e = \ln 3 + \ln e$$

$$\boxed{a = 1 + \ln 3}$$

תשובה: $a = 1 + \ln 3$.

נוסחת הגידול והדעיכה היא $M_t = M_0 \cdot q^t$

שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן הוא q . פרק הזמן הוא t .

M_0 - הכמות ראשונית, M_t - כמות לאחר t תקופות.

בתאריך 1.1.2012 התשלום החודשי עבור הדירה היה 5,900 שקל.

$$q = \frac{100+0.2}{100} = 1.002 \text{ לכן פי } 0.2\% \text{ ב- } 0.2\% \text{ חודש ב-}$$

בתאריך 1.1.2012 משכורתו של רן הייתה 8,000 שקל.

$$q = \frac{100+1.2}{100} = 1.012 \text{ לכן פי } 1.2\% \text{ ב- } 1.2\% \text{ חודש ב-}$$

רן יכול לשלם עבור הדירה רק אחרי התאריך שבו התשלום עבורה יהיה $0.6 = 60\%$ ממשכורתו החודשית.

$$\text{המשוואה המתאימה: } 0.6 \cdot 8,000 \cdot 1.012^t = 5,900 \cdot 1.002^t$$

$$0.6 \cdot 8,000 \cdot 1.012^t = 5,900 \cdot 1.002^t$$

$$\frac{48}{59} = \frac{1.002^t}{1.012^t}$$

$$\frac{48}{59} = \left(\frac{1.002}{1.012}\right)^t$$

$$\ln\left(\frac{48}{59}\right) = \ln\left(\frac{1.002}{1.012}\right)^t$$

$$\ln\left(\frac{48}{59}\right) = t \ln\left(\frac{1.002}{1.012}\right)$$

$$\frac{\ln\left(\frac{48}{59}\right)}{\ln\left(\frac{1.002}{1.012}\right)} = t$$

$$\boxed{t \approx 20.78}$$

תשובה: כעבור 21 חודשים, בערך.

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = x^n \cdot \ln(x^n)$ כאשר n טבעי זוגי.

פונקציה לוגריתמית מקבלת רק מספרים חיוביים ולכן תחום ההגדרה $x^n > 0$.

כיוון ש- כאשר n טבעי זוגי, הרי שניתן להציב גם מספרים שליליים.

תשובה: תחום ההגדרה $x \neq 0$.

(2) נראה שהפונקציה זוגית.

נשים לב שכיוון ש- n טבעי זוגי הרי ש $(-x)^n = x^n$.

$$f(-x) = (-x)^n \cdot \ln((-x)^n)$$

$$f(-x) = x^n \cdot \ln(x^n)$$

$$f(-x) = f(x)$$

תשובה: הפונקציה זוגית.

(3) נמצא את משוואת המשיק המקביל לציר ה- x , כלומר ששיפועו 0.

$$f(x) = x^n \cdot \ln(x^n)$$

נמצא את הנקודה שבה הנגזרת מתאפסת:

$$f(x) = x^n \cdot \ln(x^n)$$

$$f'(x) = nx^{n-1} \ln x^n + x^n \cdot \frac{nx^{n-1}}{x^n}$$

$$f'(x) = nx^{n-1} (\ln x^n + 1)$$

$$\ln x^n + 1 = 0$$

$$\ln x^n = -1$$

$$x^n = e^{-1}$$

$$x^n = \frac{1}{e} \rightarrow x = \pm \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$f(x) = x^n \cdot \ln(x^n)$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot (-1)$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$$

קיים רק ישר אחד כזה, כי פונקציית הנגזרת מתאפסת אומנם פעמיים, עבור שיעורי x נגדיים,

אולם שיעור ה- y בנקודת ההשקה שווה בשני המקרים, עקב הזוגיות.

תשובה: משוואת הישר המשיק היא $y = -\frac{1}{e}$.