א. (1) הנקודה $M(x_0, y_0)$ **נמצאת על המעגל הקנוני** $x^2+y^2=25$**, ונקודה** $P(x,y)$ **היא מפגש של** MB **ו-** NA**.**

MN **מאונך לציר ה-** x**, לכן** $y_N=-y_M=-x_0$ **עקב הסימטריה של המעגל לציר ה-** x**, ובהתאם** $N(x_0,-y_0)$**.**

רדיוס המעגל הקנוני הוא 5**, ובהתאם** $A(5,0)$ **,** $B(-5,0)$**.**

$$m_{MB}=\frac{y_M-y_B}{x_M-x_B}=\frac{y_0-0}{x_0-(-5)}=\frac{y_0}{x_0+5}$$

$$y-0=\frac{y_0}{x_0+5}(x-(-5))$$

$$\boxed{MB\equiv y=\frac{y_0}{x_0+5}x+\frac{5y_0}{x_0+5}}$$

$$m_{NA}=\frac{y_N-y_A}{x_N-x_A}=\frac{-y_0-0}{x_0-5}=\frac{-y_0}{x_0-5}$$

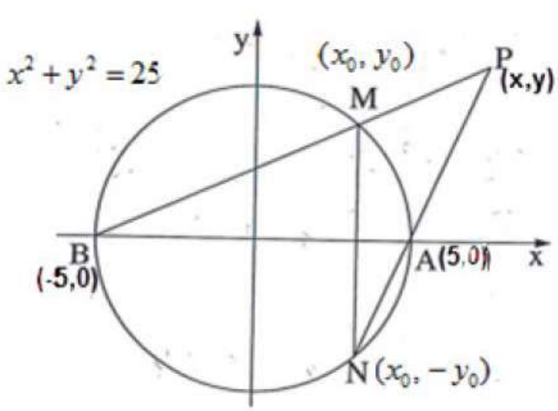
$$y-0=\frac{-y_0}{x_0-5}(x-5)$$

$$\boxed{NA\equiv y=\frac{-y_0}{x_0-5}x+\frac{5y_0}{x_0-5}}$$

תשובה: $MB\equiv y=\frac{y_0}{x_0+5}x+\frac{5y_0}{x_0+5}$, $NA\equiv y=\frac{-y_0}{x_0-5}x+\frac{5y_0}{x_0-5}$ **.**

(2) נראה, בשתי דרכים, כי המקום הגיאומטרי של הנקודות $P(x,y)$ **מקיים את המשוואה** $y^2=x^2-25$**.**

<u>דרך ראשונה</u>, הבעת שיעורי הנקודה $M(x_0,y_0)$ **באמצעות** x, y**, על ידי השוואת שתי המשוואות שהתקבלו, והצבתן במשוואת המעגל.**



$$P\begin{cases} y=\frac{y_0}{x_0+5}x+\frac{5y_0}{x_0+5} \\ y=\frac{-y_0}{x_0-5}x+\frac{5y_0}{x_0-5} \end{cases}$$

$$\frac{y_0}{x_0+5}x+\frac{5y_0}{x_0+5}=\frac{-y_0}{x_0-5}x+\frac{5y_0}{x_0-5} \quad /:y_0\neq 0$$

$$\frac{x}{x_0+5}+\frac{5}{x_0+5}=\frac{-x}{x_0-5}+\frac{5}{x_0-5} \quad /\cdot(x_0+5)(x_0-5)$$

$$x(x_0-5)+x(x_0+5)=-5(x_0-5)+5(x_0+5)$$

$$2xx_0=50 \quad \to \boxed{x=\frac{25}{x_0}}, \boxed{x_0=\frac{25}{x}}$$

$$y=\frac{y_0}{x_0+5}x+\frac{5y_0}{x_0+5} \quad \to y=\frac{y_0(x+5)}{x_0+5}$$

$$y=\frac{y_0(x+5)}{\frac{25}{x}+5} \quad \to y=\frac{xy_0(x+5)}{25+5x}$$

$$y=\frac{xy_0}{5} \quad \to \boxed{y_0=\frac{5y}{x}}$$

נציב $M(\frac{25}{x}, \frac{5y}{x})$ **במשוואת המעגל:** $(\frac{25}{x})^2 + (\frac{5y}{x})^2 = 25$ **,**

ובהתאם : $/ : \frac{25}{x^2}$ $\frac{625}{x^2} + \frac{25y^2}{x^2} = 25$ **ונקבל:** $25 + y^2 = x^2$ **ולכן:** $y^2 = x^2 - 25$.

תשובה: הוּכַח.

<u>דרך שנייה ומומלצת</u>, השוואת שיפועים: $m_{MB} = m_{PB}$ **ו-** $m_{NA} = m_{PA}$ **שהתקבלו.**

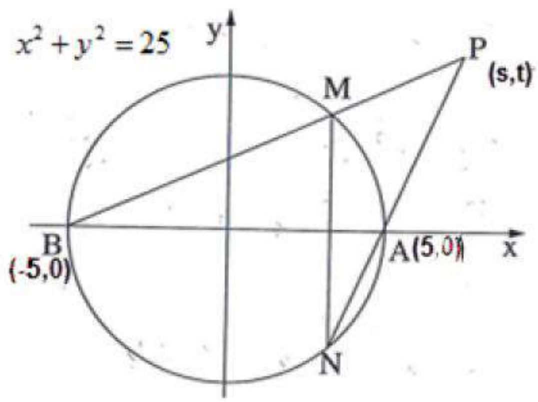
נסמן $P(s, t)$ **נקודה על המקום הגיאומטרי.**

$$m_{MB} = m_{PB}$$

$$\frac{y_M - 0}{x_M - (-5)} = \frac{t - 0}{s - (-5)} \quad \rightarrow \frac{y_M}{x_M + 5} = \frac{t}{s+5}$$

$$m_{NA} = m_{PA}$$

$$\frac{-y_M - 0}{x_M - 5} = \frac{t - 0}{s - 5} \quad \rightarrow \frac{-y_M}{x_M - 5} = \frac{t}{s-5}$$



נחלק את שתי המשוואות זו בזו:

$$-\frac{x_M - 5}{x_M + 5} = \frac{s-5}{s+5}$$

$$-sx_M - 5x_M + 5s + 25 = sx_M + 5s - 5x_M - 25$$

$$-2sx_M = -50$$

$$x_M = \frac{25}{s} \quad \rightarrow .... y_M = \frac{5t}{s}$$

והצבת $M(\frac{25}{s}, \frac{5t}{s})$ **במשוואת המעגל וההמשך זהה.**

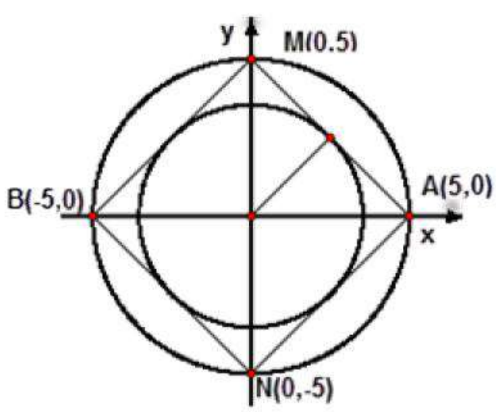
מסקנה – מומלץ להשתמש בשיפועים, ולא להיחפז למציאת משוואות ישרים בשאלון זה.

ב. $MBNA$ **הוא ריבוע, שקדקודיו הם :** $M(0,5)$ **,** $B(-5,0)$ **,** $N(0,-5)$ **ו-** $A(5,0)$ **.**

רדיוס המעגל החסום, שמרכזו הוא בראשית, הוא מרחק הראשית, לדוגמה, מהצלע MA **.**

$$m_{MA} = \frac{5-0}{0-5} = -1$$

המשוואה המפורשת של הצלע MA **היא** $y = -x + 5$ **ובצורתה הכללית:** $x + y - 5 = 0$



$$d_{O_{MA}} = -\frac{0+0-5}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \, .$$

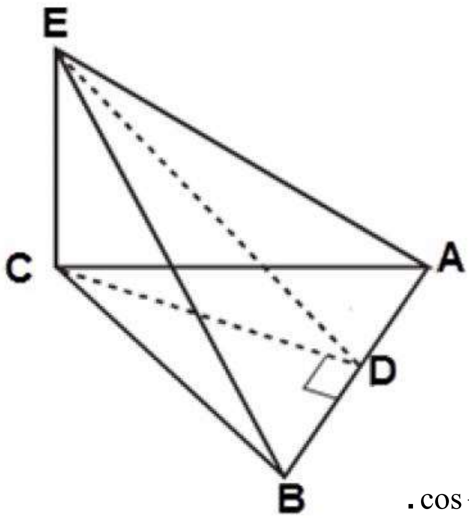
תשובה: המרחק הוא $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

א. נתון משולש שקודקודיו הם: $A(-10,3,11)$ **,** $B(-2,-5,-5)$ **,** $C(1,1,1)$.

גובה המשולש לצלע AB **הוא** CD **, ולכן** $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$ **ובהתאם** $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ **.**

$\overrightarrow{AB} = \underline{B} - \underline{A} = \underline{x} = (8,-8,-16)$ **, ולכן ההצגה הפרמטרית של הישר:** $\ell_{AB} = \underline{x} = (-10,3,11) + t(1,-1,-2)$ **.**

נקודה טיפוסית על הישר היא: $(-10+t, 3-t, 11-2t)$ **.**



$\overrightarrow{CD} = \underline{D} - \underline{C} = \underline{x} = (-11+t, 2-t, 10-2t)$ **.**

$$(-11+t, 2-t, 10-2t) \cdot (1,-1,-2) = 0$$
$$-33 + 6t = 0$$
$$t = 5.5$$
$$\underline{D} = \underline{A} + 5.5\underline{(1,-1,-2)} = \underline{(-4.5,-2.5,0)}$$

תשובה: $D(-4.5,-2.5,0)$ **.**

ב. נתונה הנקודה : $E(-1,5,-2)$ **.**

(1) נמצא את הזווית בין הישר CE **לישר** AB **, כאשר:** $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{|\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{CE}||\overrightarrow{AB}|}$ **.**

$$\overrightarrow{CE} = \underline{E} - \underline{C} = \underline{x} = (-2,4,-3)$$
$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB} = (-2,4,-3)(1,-1,-2)$$
$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 - 4 + 6 = 0$$

ולכן $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{AB}$.

תשובה: הזווית היא בת $90°$ **.**

(2) נמצא את הזווית בין הישר CE **לישר** BC **, כאשר:** $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{|\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{CE}||\overrightarrow{BC}|}$ **.**

$$\overrightarrow{BC} = \underline{C} - \underline{B} = \underline{x} = (3,6,6)$$
$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BC} = (-2,4,-3)(3,6,6)$$
$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BC} = -6 + 24 - 18 = 0$$

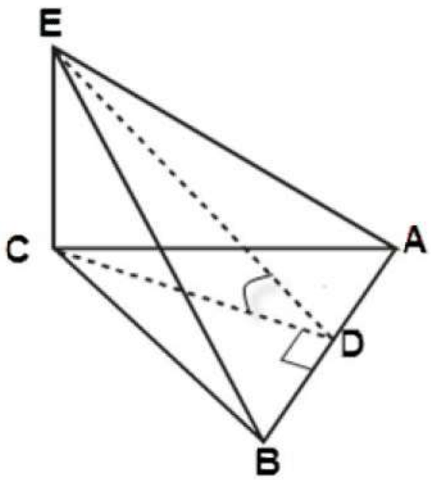
ולכן $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{BC}$.

תשובה: הזווית היא בת $90°$ **.**

(3) כיוון ש- $\overrightarrow{CE}$ **מאונך לשני וקטורים במישור** ABC **, שאינם תלויים זה בזה, הרי שהוא מאונך למישור** ABC **.**

תשובה: הזווית היא בת $90°$ **.**

ב. הזווית בין ED **למישור** ABC **היא** $\sphericalangle$EDC **, שבין המשופע להיטל שלו (** ED **) למישור** ABC **.**



כי, כפי שהראינו בתת-סעיף א(3) CE **הוא האנך למישור.**

$$\overrightarrow{ED} = \underline{D} - \underline{E} = \underline{x} = (-3.5, -7.5, 2)$$

$$\sin \sphericalangle EDC = \frac{\left|\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EC}\right|}{\left|\overrightarrow{ED}\right| \left|\overrightarrow{EC}\right|}$$

$$\sin \sphericalangle EDC = \frac{(-3.5, -7.5, 2)\ (2, -4, 3)}{\left|(-3.5, -7.5, 2)\right| \left|(2, -4, 3)\right|}$$

$$\sin \sphericalangle EDC = \frac{-7 + 30 + 6}{\sqrt{(-3.5)^2 + (-7.5)^2 + 2^2}\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 3^2}} = \frac{29}{\sqrt{72.5}\sqrt{29}}$$

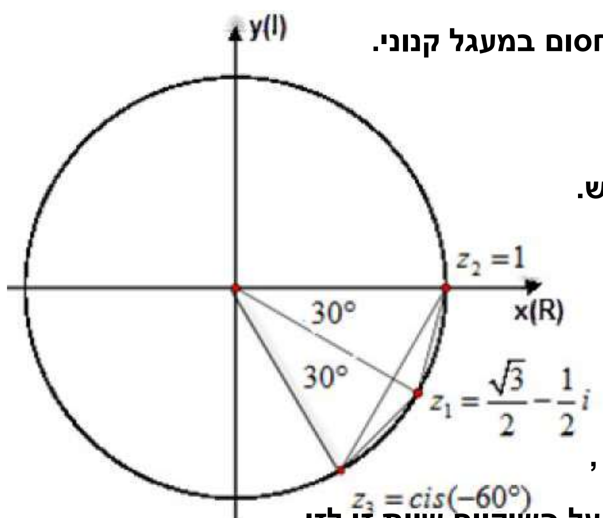
$$\sphericalangle EDC = 39.23°$$

תשובה: הזווית היא בת 39.23° **.**

א. נפתור את המשוואה $|z|i+2z=\sqrt{3}$. **נסמן** $z=x+yi$.

$$|x+yi|i+2(x+yi)=\sqrt{3}$$
$$\sqrt{x^2+y^2}i+2x+2yi=\sqrt{3}$$
$$R:2x=\sqrt{3}\quad\rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$I:\sqrt{x^2+y^2}+2y=0\quad\rightarrow\quad\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+y^2}=-2y\quad(\;)^2$$
$$\frac{3}{4}+y^2=4y^2\quad\rightarrow\quad y=\pm\frac{1}{2}$$
$$\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=-2\cdot\frac{1}{2}\quad\rightarrow 1\neq-1\quad\rightarrow not\ o.k.$$
$$\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(-\frac{1}{2})^2}=-2\cdot(-\frac{1}{2})\quad\rightarrow 1=1\quad\rightarrow o.k.\quad\rightarrow \boxed{z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$$

תשובה: $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.



ב. $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ **הוא קדקוד הראש של משולש שווה שוקיים, החסום במעגל קנוני.**

z_2 **ו-** z_3 **הם שני קדקודי הבסיס, כאשר** $z_2=1$ **,**

ולכן $R=1$ **לשלושת המספרים המרוכבים, שבקדקודי המשולש.**

$$\tan\theta_{z_1}=\frac{-1/2}{\sqrt{3}/2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\theta=-30°+180°k$$
$$z_1=cis(-30°)\quad\leftarrow 4th\ quadrant$$

הזווית המרכזית המתאימה ל- $z_1=cis(-30°)$ **היא כמובן** $30°$ **,**

וכיוון שהמשולש שווה שוקיים, הרי ששתי הקשתות הנשענות על השוקיים שוות זו לזו,

ולכן הזווית המרכזית המתאימה ל- z_3 **היא בת** $60°$ **, ומכאן ש-** $z_3=cis(-60°)$.

$w=z_1\cdot z_2\cdot z_3=cis(-30°)\cdot1\cdot cis(-60°)=cis(-90°)=-i$ **.**

הסכום $w+w^2+w^2+w^3+w^4+...+w^{4n}$ **הוא סכום של סדרה הנדסית,**

שאיברה הראשון הוא $-i$ **מנתה** $-i$ **, ומספר האיברים בה הוא** $4n$ **.**

$$S_{4n}=\frac{-i((-i)^{4n}-1)}{-i-1}=\frac{-i(((-i)^4)^n-1)}{-i-1}=\frac{-i(1^n-1)}{-i-1}=\frac{-i(1-1)}{-i-1}=0\ .$$

תשובה: הסכום הוא 0 .

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{2^{x-m}+2^{m-x}}$ **(** m **הוא פרמטר).**

נתונה גם הפונקציה $g(x)$ **המקיימת:** $g(x)=f'(x)f(x)$ **, כאשר** $g(2)=-\frac{3}{4}\ell n\,2$ **.**

$$f'(x)=\frac{2^{x-m}\ell n\,2-2^{m-x}\ell n\,2}{2\sqrt{2^{x-m}+2^{m-x}}}$$

$$f'(x)=\frac{2^{x-m}-2^{m-x}}{2\sqrt{2^{x-m}+2^{m-x}}}\cdot\ell n\,2$$

$$g(x)=\sqrt{2^{x-m}+2^{m-x}}\cdot\frac{2^{x-m}-2^{m-x}}{2\sqrt{2^{x-m}+2^{m-x}}}\cdot\ell n\,2$$

$$g(x)=\frac{2^{x-m}-2^{m-x}}{2}\cdot\ell n\,2$$

נציב: $y=-\frac{3}{4}\ell n\,2$, $x=2$ **בפונקציה** $g(x)$ **.**

$$-\frac{3}{4}\ell n\,2=\frac{2^{2-m}-2^{m-2}}{2}\cdot\ell n\,2$$

$$-1.5=2^{2-m}-\frac{1}{2^{2-m}}\qquad\boxed{2^{2-m}=t}$$

$$t^2+1.5t-1=0$$

$$t_1=\frac{1}{2}\quad\rightarrow 2^{2-m}=2^{-1}\quad\rightarrow\boxed{m=3}$$

$$t_2=-2\quad\rightarrow 2^{2-m}=-2\quad\rightarrow\varnothing$$

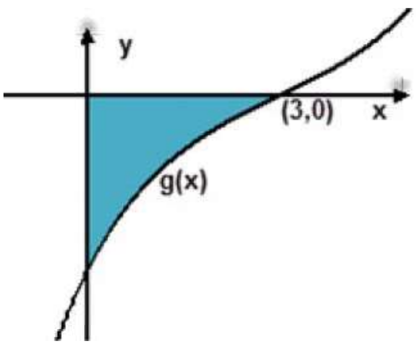
מכאן ש: $f(x)=\sqrt{2^{x-3}+2^{3-x}}$ **ו-** $g(x)=\frac{2^{x-3}-2^{3-x}}{2}\cdot\ell n\,2$ **.**

נתון כי $g(x)$ עולה לכל x.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $g(x)=0$, לכן $2^{x-3}=2^{3-x}$ ו- $(3,0)$ הם שיעורי נקודת החיתוך.

כיוון שהפונקציה עולה, הרי שהשטח המבוקש הוא מתחת לציר ה- x.

נחשב את שטחו, על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית (אפשר גם בדרך רגילה).



$$S=\int_0^3 (0-f(x)\cdot f'(x))\,dx$$

$$S=-\frac{(f(x))^2}{2}\Big]_0^3$$

$$\left.\begin{array}{l} x=3: \quad -f(3)=-\dfrac{2^{3-3}+2^{3-3}}{2}=-1 \\ x=0: \quad -f(0)=-\dfrac{2^{0-3}+2^{3-0}}{2}=-\dfrac{65}{16} \end{array}\right\} S=-1-(-\frac{65}{16})=\boxed{3\frac{1}{16}}$$

תשובה: השטח הוא $3\frac{1}{16}$.

א. נתונה פונקציית הנגזרת $f'(x)=\frac{\ell n(-x)+2}{x}$.

פונקציית ה- ℓn **מקבלת רק ביטויים חיוביים, ולכן** $-x>0$ **ומכאן ש:** $x<0$.

$x<0$ **אינו מאפס גם את המכנה ולכן זהו תחום ההגדרה.**

תשובה: הפונקציה מוגדרת עבור $x<0$.

ב. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)=\frac{\ell n(-x)+2}{x}$ **ונקבע את סוגה.**

$$f''(x)=\frac{\frac{-1}{-x}\cdot x-(\ell n(-x)+2)}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{1-\ell n(-x)-2}{x^2}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{-1-\ell n(-x)}{x^2}}$$

$$\ell n(-x)=-1$$

$$-x=\frac{1}{e}$$

$$x=-\frac{1}{e}\sim-0.36$$

$$f''(-0.4)<0,\quad f''(-0.3)>0\quad\rightarrow Min$$

$$f'(-\frac{1}{e})=\frac{\ell n(\frac{1}{e})+2}{-1/e}=-e\quad\rightarrow\boxed{(-\frac{1}{e},-e),Min}$$

תשובה: $(-\frac{1}{e},-e),Min$.

ג. נמצא את שיעור ה- x **של נקודת הקיצון של הפונקציה** $f(x)$ **ונקבע את סוגה.**

$$f'(x)=0\quad\rightarrow\ell n(-x)+2=0$$

$$\ell n(-x)=-2$$

$$-x=\frac{1}{e^2}$$

$$x=-\frac{1}{e^2}\sim-0.14$$

$$f'(-0.2)<0,\quad f'(-0.1)>0\quad\rightarrow\boxed{x=-\frac{1}{e^2},Min}$$

תשובה: $x=-\frac{1}{e^2},Min$.

ד. הפונקציה $g(x)=-\frac{1}{f'(x)}$.

(1) $g(x)$ מוגדרת כאשר $f'(x)$ מוגדרת ואינה שווה ל- 0 .

על פי סעיף א $f'(x)$ מוגדרת, כנתון כמו $f(x)$, עבור $x<0$.

על פי סעיף ג $f'(x)=0$ עבור $x=-\frac{1}{e^2}$.

תשובה: תחום ההגדרה של $g(x)$ הוא $x<0$, $x\neq-\frac{1}{e^2}$.

(2) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של $g(x)$, ונקבע את סוגה.

$$g'(x)=-\frac{-f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$g'(x)=\frac{f''(x)}{(f'(x))^2}=\frac{f''(x)}{+}$$

מכאן שעל פי סעיף ב מתקיים $x=-\frac{1}{e}$ מינימום .

$$g(-\frac{1}{e})=-\frac{1}{f'(-1/e)}=-\frac{1}{-e}=\frac{1}{e}$$

תשובה: $(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}), Min$.