א. נתונה פרבולה I **שמשוואתה** $y^2 = 4x$ **, שבה** $p = 2$ **.**

נתונה פרבולה II **שמשוואתה** $y^2 = -4x$ **, שגם בה** $p = 2$ **.**

המשיקים לפרבולות בנקודות A **ו-** B **, נפגשים על ציר ה-** y **.**

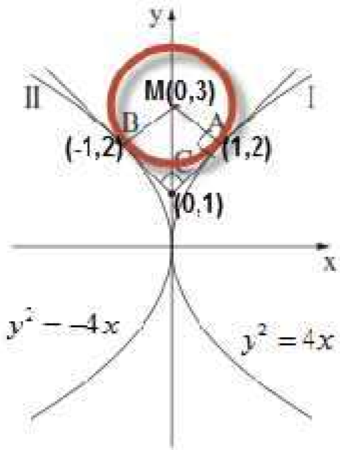
משוואת המשיק לפרבולה, בנקודת ההשקה, היא $yy_0 = p(x + x_0)$ **.**

אם נציב $y = 0$ **, נקבל** $x = -x_0$ **,**

ולכן נקודת החיתוך עם ציר ה- y **שבה** $x_{\mathrm{C}} = 0$ **, היא נקודת האמצע,**

(בין נקודת ההשקה לנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x **),**

ומכאן ש- $y_{\mathrm{C}} = \frac{y_{\mathrm{A}} + 0}{2} = \frac{y_{\mathrm{A}}}{2}$ **.**



עבור הפרבולה $y^2 = -4x$ **(מהפרבולות** $y^2 = -2px$ **)**

משוואת המשיק היא $yy_0 = -p(x + x_0)$ **, ואופן ההוכחה זהה ונקבל ש-** $y_{\mathrm{C}} = \frac{y_{\mathrm{B}}}{2}$ **.**

מאחר ששני המשיקים נחתכים בנקודה C **, הרי ש-** $\frac{y_{\mathrm{B}}}{2} = \frac{y_{\mathrm{A}}}{2} \rightarrow y_{\mathrm{B}} = y_{\mathrm{A}}$ **.**

(מכאן גם, עקב הסימטריה של שתי הפרבולות לציר ה- y **, ש-** $x_{\mathrm{B}} = -x_{\mathrm{A}}$ **).**

נתון ששני המשיקים מאונכים זה לזה בנקודה $\mathrm{C}(0, \frac{y_{\mathrm{A}}}{2})$ **.**

$$\left.\begin{array}{l} m_{\mathrm{AC}} = \frac{p}{y_{\mathrm{A}}} = \frac{2}{y_{\mathrm{A}}} \\ m_{\mathrm{BC}} = \frac{-p}{y_{\mathrm{B}}} = \frac{-2}{y_{\mathrm{A}}} \end{array}\right\} \frac{2}{y_{\mathrm{A}}} \cdot \frac{-2}{y_{\mathrm{A}}} = -1 \quad \rightarrow y_{\mathrm{A}} = 2 \leftarrow y_{\mathrm{A}} > 0$$

נציב במשוואות הפרבולות ונקבל ששיעורי נקודות ההשקה: $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{B}(-1,2)$ **.**

תשובה: $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{B}(-1,2)$ **.**

ב. (1) נתון ש- $ACBM$ **ריבוע, כאשר על פי הסעיף הקודם** $C(0,1)$ **.**

האלכסונים חוצים זה את זה בריבוע, ולכן מפגש האלכסונים הוא בנקודה $(0,2)$ **(אמצע** AB**),**

ועל פי נוסחת אמצע קטע לאלכסון MC**, נקבל ש-** $M(0,3)$**.**

תשובה: $M(0,3)$ **.**

(2) נתון כי מעגל שמרכזו $M(0,3)$ **משיק לישרים** AC **ו-** BC**.**

MA **מאונך למשיק (כי זוויות הריבוע ישרות), ולכן** MA **הוא המרחק הקטן ביותר ממרכז המעגל למשיק, ומכאן שהוא הרדיוס.**

אורך הרדיוס: $R=\sqrt{(0-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$

ומשוואת המעגל היא $x^2+(y-3)^2=2$**.**

תשובה: משוואת המעגל היא $x^2+(y-3)^2=2$**.**

א. נתונה פירמידה $OBCD$ **ששלושה ממקצועותיה, המאונכים זה לזה, מונחים על הצירים.**

על פי הנתונים: $O(0,0,0)$ **,** $B(3,0,0)$ **,** $C(0,4,0)$ **,** $D(0,0,6)$**.**

$OK:KB=2:1$**, ובהתאם** $K(2,0,0)$**.**

$OP:PD=1:1$**, ובהתאם** $P(0,0,3)$**.**

דרך הנקודות K **ו-** P **עובר מישור המקביל למקצוע** CD**.**

נמצא את ההצגה הפרמטרית של המישור ואת משוואת המישור, החותך את ציר ה- y **בנקודה** Q**.**

נמצא את ההצגה הפרמטרית של המישור KPQ **ולאחר מכן את משוואת המישור.**

$$\overrightarrow{KP}=\underline{P}-\underline{K}=\underline{x}=(-2,0,3)$$
$$\overrightarrow{CD}=\underline{D}-\underline{C}=\underline{x}=(0,-4,6)$$

ההצגה הפרמטרית של המישור היא: $\underline{x}=(2,0,0)+t(0,2,-3)+s(-2,0,3)$**.**

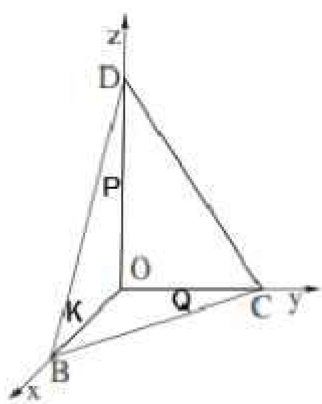
$$\left.\begin{array}{l}(a,b,c)\cdot(0,-2,3)=0 \quad \to -2b+3c=0\\ (a,b,c)\cdot(-2,0,3)=0 \quad \to -2a+3c=0\end{array}\right\} c=2, b=a=3.$$

משוואת המישור KPQ **היא:** $3x+3y+2z+d=0$**. נציב** $K(2,0,0)$ **ונקבל ש-** $d=-6$ **.**

משוואת המישור KPQ **היא:** $3x+3y+2z-6=0$**.**

$x_Q=z_Q=0$**, ומכאן ש-** $3y_Q-6=0$**, ולכן** $y_Q=2$ **ו-** $Q(0,2,0)$ **באמצע הקטע** OC**.**

תשובה: $OQ:QC=1:1$ **.**



<u>דרך חלופית ואלגנטית</u>

המישור KPQ **מקביל למקצוע** CD**.**

כיוון שכך הישר PQ **מקביל למקצוע או מצטלב איתו.**

כיוון שהנקודות P,Q **נמצאות גם במישור** ODC**,**

הרי שבהכרח אין הצטלבות והישרים מקבילים.

מכאן ש- PQ **קטע אמצעים ב-** ΔODC**,**

ולכן הנקודה Q **נמצאת באמצע הקטע** OC**,**

ובהתאם לכך: $OQ:QC=1:1$**.**

ב. נחשב את היחס המבוקש, בין נפחי שתי הפירמידות.

$$V_{\text{OKPQ}} = \frac{S_{\Delta\text{BOQ}} \cdot \text{OP}}{3} = \frac{\frac{2\cdot 2}{2}\cdot 3}{3} = 2$$

$$V_{\text{OBCD}} = \frac{S_{\Delta\text{OBC}} \cdot \text{OD}}{3} = \frac{\frac{4\cdot 3}{2}\cdot 6}{3} = 12 .$$

$$\frac{V_{\text{OKPQ}}}{V_{\text{OBCD}}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

תשובה: $\frac{V_{\text{OKPQ}}}{V_{\text{OBCD}}} = \frac{1}{6}$.

ג. נמצא את הזווית בין הישר CB **למישור** KPQ.

$\overrightarrow{\text{CB}} = \underline{\text{B}} - \underline{\text{C}} = \underline{x} = (3,-4,0)$.

$$\sin\sphericalangle(\overrightarrow{\text{CB}},\pi_{\text{KPQ}}) = \frac{|(3,-4,0)\cdot(3,3,2)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+0^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2+2^2}} = \frac{|3\cdot 3-4\cdot 3+0\cdot 2|}{5\cdot\sqrt{22}} = \frac{3}{5\cdot\sqrt{22}} \quad \to \sphericalangle(\overrightarrow{\text{CB}},\pi_{\text{KPQ}}) = 7.349^\circ .$$

תשובה: הזווית בין הישר CB **למישור** KPQ **היא בת** 7.349° .

א. נתון המקום הגיאומטרי $z\overline{z}+i(z-\overline{z})+z+\overline{z}=0$ I **, כאשר** $z=x+yi$ **מספר מרוכב.**

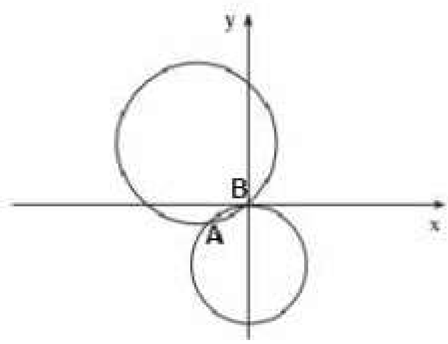
נזהה את המקום הגיאומטרי.

$$(x+yi)(x-yi)+i\left[x+yi-(x-yi)\right])+x+yi+x-yi=0$$
$$x^2+y^2+i(+2yi)+2x=0$$
$$x^2+y^2-2y+2x=0$$
$$\boxed{(x+1)^2+(y-1)^2=2}$$

וזה מעגל שמרכזו $(-1,1)$ **, ורדיוסו** $\sqrt{2}$ **.**

נתון מקום גיאומטרי נוסף $|z|^2+i(\overline{z}-z)=0$ II **.**

נזהה את המקום הגיאומטרי.



$$(\sqrt{x^2+y^2})^2+i\left[(x-yi-(x+yi)\right]=0$$
$$x^2+y^2+i(-2yi)=0$$
$$x^2+y^2+2y=0$$
$$\boxed{x^2+(y+1)^2=1}$$

וזה מעגל שמרכזו $(0,1)$ **, ורדיוסו** 1 **.**

תשובה: הסרטוט משמאל.

ב. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך בין שני המעגלים.

$$-\begin{cases}x^2+y^2-2y+2x=0\\x^2+y^2+2y=0\end{cases}$$
$$-4y+2x=0$$
$$\boxed{x=2y}$$
$$(2y)^2+y^2+2y=0$$
$$5y^2+2y=0$$
$$y(5y+2)=0$$
$$\left.\begin{matrix}y=0 & \to x=0\\ y=-0.4 & \to x=-0.8\end{matrix}\right\}\boxed{\mathrm{B}(0,0),\mathrm{A}(-0.8,-0.4)}\leftarrow x_{\mathrm{A}}<x_{\mathrm{B}}$$

תשובה: $\mathrm{B}(0,0),\mathrm{A}(-0.8,-0.4)$ **.**

ג. נתונה הנקודה $P(x_0, y_0)$ **הנמצאת במרחק שווה מכל הנקודות שעל המעגל שמרכזו** $(-1, 1)$**, ורדיוסו** $\sqrt{2}$ **.**

מכאן ש- $P(x_0, y_0)$ **היא מרכז המעגל ושיעוריה** $(-1, 1)$ **.**

בהתאם:

$$z_0 = -1 + i$$
$$\overline{z} = -1 - i$$

נציב את $\overline{z} = -1 - i$ **במשוואת המקום הגיאומטרי השני:** $x^2 + (y+1)^2 = 1$**.**

$$(-1)^2 + (-1+1)^2 = 1$$
$$1 = 1 \quad o.k.$$

תשובה: הוכח.

ד. נתון $z_1 = -0.8 - 0.4i$ **.**

$$a_1 = 5z_1 = -4 - 2i$$
$$d = z_0 = -1 + i$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + d(n-1)\right]$$
$$S_n = \frac{n}{2}\left[2(-4-2i) + (-1+i)(n-1)\right]$$
$$S_n = \frac{n}{2}\left(-8 - 4i - n + 1 + in - i\right)$$

על-מנת שסכום זה יהיה מספר ממשי, נדרש שהחלק המדומה יהיה שווה ל- 0 **.**

$$0 = \frac{n}{2}\left(-4 + n - 1\right) \quad :\frac{n}{2} \neq 0$$
$$-5 + n = 0$$
$$\boxed{n = 5}$$

תשובה: הערך היחידי האפשרי הוא $n = 5$, **עבורו סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה הוא מספר ממשי.**

א. נתונה הפונקציה הזוגית $f(x)=e^{ax^2+bx+2}$ **.**

פונקציה זוגית סימטרית לציר ה- y **, כאשר** $f(x)=f(-x)$ **.**

$$e^{a(-x)^2+b(-x)+2}=e^{ax^2+bx+2}$$

$$ax^2-bx+2=ax^2+bx+2$$

$$-2bx=0$$

נכון לכל x **עבור** $b=0$ **.**

תשובה: $b=0$ **.**

ב. נתון כי לפונקציה יש בדיוק שתי נקודות פיתול.

עקב הזוגיות של הפונקציה, יהיו אלו נקודות פיתול עם שיעורי y **זהים, ושיעורי** x **שונים רק בסימנים.**

$$f'(x)=2axe^{ax^2+2}$$

$$f''(x)=2a\cdot\left(e^{ax^2+2}+x\cdot 2axe^{ax^2+2}\right)$$

$$\boxed{f''(x)=2ae^{ax^2+2}\cdot\left(1+2ax^2\right)}$$

הגורם השמאלי במכפלה, אינו אפס, כי אחרת $a=0$ **ו-** $f(x)=e^2$ **פונקציה קבועה ללא נקודות פיתול.**

הגורם הימני הוא ביטוי שמייצג פרבולה.

עבור $a>0$ **היא תהייה פרבולה בעלת מינימום, חיובית לכל** x **ולא תהיינה נקודות פיתול, כי** $f''(x)>0$ **.**

עבור $a<0$ **היא תהייה פרבולה בעלת מקסימום, שתחתוך את ציר ה-** x **פעמיים.**

במקרה זה, הפרבולה תעבור משליליות לחיוביות ומחיובית לשליליות,

והמכפלה כולה להפך (כי הגורם השמאלי שלילי , כאשר $a<0$ **),**

והפונקציה תהייה קעורה כלפי מעלה בשני תחומים, וקעורה כלפי מטה ביניהם.

תשובה: הוכח.

ג. נתון כי הפונקציה מחליפה קעירויות עבור $x=\pm 0.5$ **, ולכן** $f''(0.5)=0$ **.**

$$1+2a\cdot 0.5^2=0$$

$$\boxed{a=-2}$$

תשובה: $a=-2$.

ד. הפונקציה $f(x)=e^{-2x^2+2}$ **.**

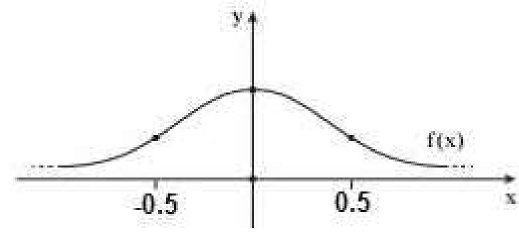
(1) הביטוי $-2x^2+2$ **שואף ל-** $-\infty$ **עבור** $x\to\pm\infty$ **, ולכן** $f(x)=e^{-2x^2+2}\to e^{-\infty}\to 0$ **.**

נראה גם על ידי הצבת ערכים: עבור $x=\pm5$ **נקבל** $y=1.03\cdot10^{-10}\to 0$ **.**

תשובה: $y=0$ **אסימפטוטה המאונכת לציר ה-** y **(אין אסימפטוטות אנכיות לציר ה-** x**).**

(2) סקיצה מתאימה,

כאשר עבור $x=0$ **מתקבלת נקודת מקסימום, כי מאפס את הנגזרת ונמצא בתחום של קעירות כלפי מטה.**



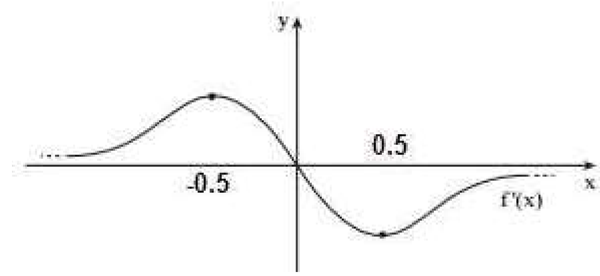
ה. שיקולים לסרטוט גרף הנגזרת.

הפונקציה $f(x)=e^{-2x^2+2}$ **עולה בתחום** $x<0$ **, ויורדת בתחום** $x>0$ **- ולכן הנגזרת עוברת מחיוביות לשליליות.**

הפונקציה $f(x)=e^{-2x^2+2}$ **קעורה כלפי מטה בתחום** $-0.5<x<0.5$ **, ולכן בתחום זה** $f''(x)<0$ **ו-** $f'(x)$ **יורדת.**

בשאר התחומים $f''(x)>0$ **ו-** $f'(x)$ **עולה.**

סקיצה מתאימה:



ו. נתונה הפונקציה $h(x)=f'(x)\cdot f''(x)$

פונקציה זו חיובית, כאשר סימני הנגזרת הראשונה והשנייה זהים (ושונים מאפס).

עבור $x<-0.5$ **-** $f(x)$ **עולה וקעורה כלפי מעלה ולכן שני הסימנים חיוביים.**

עבור $0<x<0.5$ **-** $f(x)$ **יורדת וקעורה כלפי מטה ולכן שני הסימנים שליליים.**

תשובה: $0<x<0.5$ **או** $x<-0.5$ **.**

א. נתונה הפונקציה $g(x)=\ell n\,(2-e^x)$ **והפונקציה** $f(x)=\ell n\,(ae^x-be^{2x})$ **,** ($a,b>0$ **פרמטרים).**

לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.

תחום ההגדרה של $g(x)=\ell n\,(2-e^x)$ **הוא** $2-e^x>0 \quad \to e^x<2 \quad \to x<\ell n\,2$ **.**

בהתאם $x=\ell n\,2$ **מאפס את הביטוי** ae^x-be^{2x} **.**

$$ae^{\ell n\,2}-be^{2\ell n\,2}=0$$
$$2a-be^{\ell n\,4}=0$$
$$2a-4b=0$$
$$\boxed{a=2b}$$

תשובה: הוכח.

ב. ידוע שלשתי הפונקציות נקודה אחת משותפת, והיא נקודת הקיצון של $f(x)=\ell n\,(2be^x-be^{2x})$ **.**

נמצא את שיעורי נקודת הקיצון.

$$f'(x)=\frac{2be^x-2be^{2x}}{2be^x-be^{2x}}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{2be^x(1-e^x)}{2be^x-be^{2x}}}$$
$$e^x=1$$
$$x=0$$
$$g(0)=\ell n\,(2-e^0)=0$$

ובהתאם שיעורי הנקודה המשותפת הם $(0,0)$ **.**

נציב ב- $f(x)=\ell n\,(2be^x-be^{2x})$

$$0=\ell n\,(2be^0-be^{2\cdot 0})$$
$$2b-b=1$$
$$\boxed{b=1} \quad \to \boxed{a=2}$$

תשובה: $a=2\ ,\ b=1$ **, שיעורי נקודת הקיצון של** $f(x)=\ell n\,(2e^x-e^{2x})$ **הם** $(0,0)$ **.**

ג. נראה ש- $g(x)=\ell n\,(2-e^x)$ **יורדת וקעורה כלפי מטה ($\cap$) עבור** $x<\ell n\,2$**.**

$$\boxed{g'(x)=\frac{-e^x}{2-e^x}}$$

הנגזרת שלילית (מונה שלילי, ומכנה חיובי על פי תחום הגדרה) ולכן הפונקציה יורדת עבור $x<\ell n\,2$**.**

$$g''(x)=\frac{-e^x\,(2-e^x)-e^x\cdot e^x}{(2-e^x)^2}$$

$$g''(x)=\frac{e^x(-2+e^x-e^x)}{2-e^x}$$

$$\boxed{g''(x)=\frac{-2e^x}{2-e^x}}$$

הנגזרת השנייה שלילית (מונה שלילי, ומכנה חיובי על פי תחום הגדרה),

ולכן הפונקציה קעורה כלפי מטה ($\cap$) עבור $x<\ell n\,2$ **.**

תשובה: הוכַח.

ד. נראה שההפרש בין שתי הפונקציות הוא פונקציה קווית.

$$f(x)-g(x)=\ell n\,(2e^x-e^{2x})-\ell n\,(2-e^x)$$

$$f(x)-g(x)=\ell n\frac{2e^x-e^{2x}}{2-e^x}$$

$$f(x)-g(x)=\ell n\frac{e^x(2-e^x)}{2-e^x}$$

$$f(x)-g(x)=\ell n e^x$$

$$\boxed{f(x)-g(x)=x}$$

ומכאן שההפרש בין שתי הפונקציות הוא הפונקציה הקווית $y=x$ **,**

ולכן $f(x)$ **מעל** $g(x)$ **מימין לנקודה המשותפת** $(0,0)$**, ומתחת לה משמאל לנקודה זו.**

תשובה: הוכַח.

ה. (1) תחום ההגדרה של שתי הפונקציות הוא $x<\ell n\,2$ **, או** $x<0.693147$ **.**

נבדוק מה קורה בסמוך למספר זה.

$f(0.6929)=-6.91 \quad \to -\infty$ **. זו ירידה איטית ל-** $-\infty$ **ובכל מקרה** $x=\ell n\,2$ **אסימפטוטה אנכית לציר ה-** x **.**

$g(0.6929)=-7.61 \quad \to -\infty$ **. זו ירידה איטית ל-** $-\infty$ **ובכל מקרה** $x=\ell n\,2$ **אסימפטוטה אנכית לציר ה-** x **.**

נבדוק מה קורה כאשר $x\to-\infty$

$f(-10)=-9.3\to-\infty$ **. זו ירידה איטית ל-** $-\infty$ **ובכל מקרה אין אסימפטוטה אופקית.**

$g(-10,000)=0.693=\ell n\,2$ **, כי עבור** $x\to-\infty$ **מתקיים** $e^x\to 0$ **ואז** $g(x)\to\ell n\,2$ **ויש אסימפטוטה אופקית.**

תשובה: $f(x)$ **:** $x=\ell n\,2$ **.** $g(x)$ **:** $x=\ell n\,2$ **,** $y=\ell n\,2$ **(משמאל) עבור** $x\to-\infty$ **.**

(2) סקיצה של הגרפים של שתי הפונקציות.