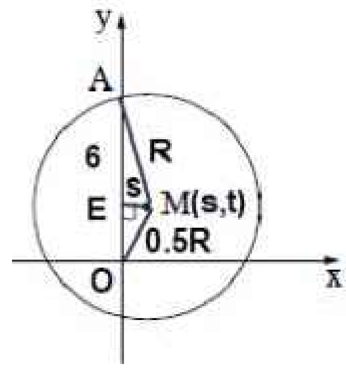
א. נסמן $M(s,t)$ **, נקודה על המקום הגיאומטרי.**

$AE=6$ **, לכן (ע"פ משפט פיתגורס** ΔMAE **) מתקיים:** $s^2+6^2=R^2 \quad \to (1)\ s^2+36=R^2$ **.**

$MO=0.5R$ **, לכן (ע"פ משפט פיתגורס** ΔMOE **) מתקיים:** $s^2+t^2=(0.5R)^2 \quad \to (2)\ s^2+t^2=0.25R^2$ **.**



$$\begin{cases} s^2+36=R^2 \\ s^2+t^2=0.25R^2 \quad /\cdot(-4) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} s^2+36=R^2 \\ -4s^2-4t^2=-R^2 \end{cases}$$

$$-3s^2-4t^2+36=0$$

$$3s^2+4t^2=36 \quad /:36$$

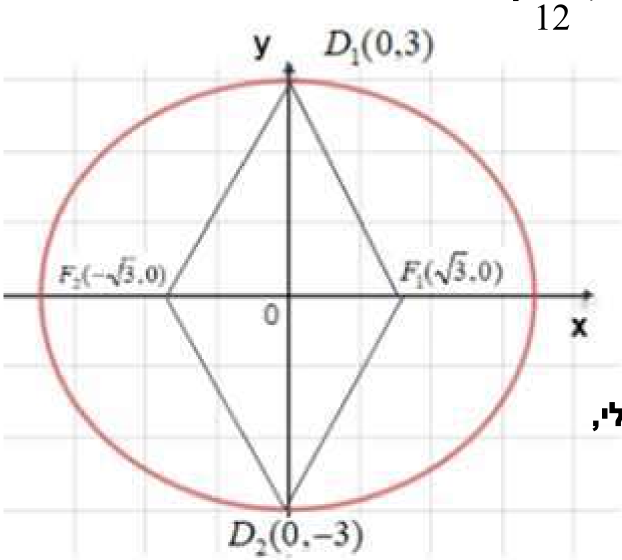
$$\frac{s^2}{12}+\frac{t^2}{9}=1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1}$$

כיוון שבשאלה נאמר "כמתואר בציור", הרי שהנקודות $M(s,t)$ **נמצאות ברביע הראשון,**

אולם, כולן על האליפסה, שמשוואתה: $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$ **.**

תשובה: כל הנקודות נמצאות על האליפסה, שמשוואתה: $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$ **.**



ב. (1) $a^2=12, \quad b^2=9, \quad \to c^2=a^2-b^2=12-9=3$ **.**

ולכן מוקדי האליפסה, מבלי לאבד את הכלליות,

הם: $F_1(\sqrt{3},0)$, $F_2(-\sqrt{3},0)$ **.**

המרובע, שאת שטחו המקסימלי יש לחשב,

מורכב משני משולשים, שלהם צלע משותפת $F_2F_1=2\sqrt{3}$ **.**

שטחו המקסימלי, של כל משולש, יתקבל עבור גובה מקסימלי,

וזאת כאשר $D_1(0,3)$, $D_2(0,-3)$ **תמוקמנה על ציר ה-** y **.**

השטח המקסימלי , של המעוין, הוא $S_{F_1D_1F_2D_2}=\frac{2\sqrt{3}\cdot 6}{2}=6\sqrt{3}$ **.**

תשובה: השטח הגדול ביותר האפשרי, עבור המרובע $F_1D_1F_2D_2$ **, הוא** $6\sqrt{3}$ **.**

ב. (2) סכום מרחקיה של כל נקודה על האליפסה ממוקדי האליפסה, הוא $2a$.

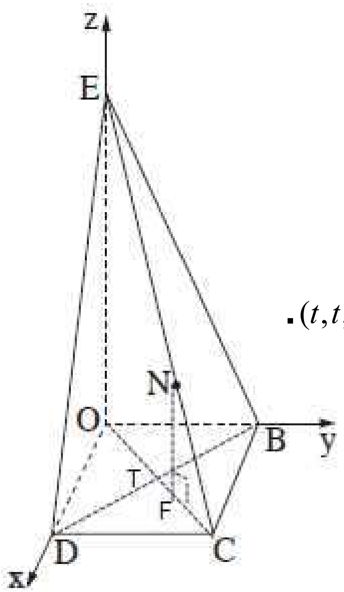
מכאן שהיקפו של כל מרובע, שקדקודיו במוקדים ובשתי נקודות על האליפסה, כמתואר בשאלה, הוא $4a$.

לכן, היקפו של המעוין $F_1D_1F_2D_2$ הוא קבוע.

ההיקף הוא: $P_{F_1D_1F_2D_2} = 4a = 4\cdot\sqrt{12} = 8\sqrt{3}$.

תשובה: לא קיים מרובע $F_1D_1F_2D_2$ בעל היקף גדול ביותר .

א. נתונה פירמידה $OBCDE$ **שבסיסה** $OBCD$ **הוא ריבוע, המונח על מישור** $[x,y]$**, שמשוואתו** $z=0$ **.**



המקצוע OE **מאונך למישור הבסיס, ובהתאם וקטור הכיוון שלו הוא** $\underline{x}=(0,0,1)$ **.**

על פי הנתונים: $O(0,0,0)$ **,** $B(0,4,0)$ **,** $C(4,0,0)$ **,** $D(4,0,0)$**,** $E(0,0,12)$ **.**

$\overrightarrow{EC}=\underline{C}-\underline{E}=\underline{x}=(4,4,-12)$ **, וההצגה הפרמטרית היא:** $\underline{x}=(0,0,12)+t(1,1,-3)$ **.**

תשובה: הצגה הפרמטרית של הישר EC **היא** $\underline{x}=(0,0,12)+t(1,1,-3)$ **.**

ב. הנקודה N **נמצאת על המקצוע** EC **, והנקודה הטיפוסית המתאימה היא:** $(t,t,12-3t)$ **.**

מן הנקודה N **מורידים אנך למישור** $z=0$**, החותך אותו בנקודה** F**, ולכן** $x_N=x_F$ **.**

מרחק הנקודה F **מציר ה-** y **הוא** 3**, ולכן** $x_F=3$ **וגם** $x_N=3$ **.**

על פי שיעורי הנקודה הטיפוסית, שעל המקצוע EC **, נקבל** $t=3$,

ושיעורי הנקודה הם $N(3,3,3)$ **.**

תשובה: $N(3,3,3)$ **.**

ג. BC **מקביל לציר ה-** x **, ולכן וקטור הכיוון שלו הוא :** $\underline{x}=(1,0,0)$ **, ובמשוואת המישור** BCN **נקבל** $a=0$ **.**

ההצגה הפרמטרית של המישור BCN **היא:** $\underline{x}=(0,4,0)+t(1,1,-3)+s(1,0,0)$ **.**

$$(a,b,c)\cdot(1,1,-3)=0 \quad \rightarrow a+b-3c=0,$$
$$a=0 \quad \rightarrow b=3c, \quad \rightarrow c=1, b=3$$

משוואת המישור BCN **היא:** $3y+z+d=0$**. נציב** $B(0,4,0)$ **ונקבל ש-** $d=-12$ **.**

תשובה: משוואת המישור BCN **היא:** $3y+z-12=0$**.**

נמצא את הזווית בין המישור BCN **ובין בסיס הפירמידה** $OBCD$**.**

$$\cos\sphericalangle(\pi_{BCN},\pi_{OBCD})=\frac{|(0,3,1)\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{0^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{|1|}{\sqrt{10}} \quad \rightarrow \sphericalangle(\pi_{BCN},\pi_{OBCD})=71.565^\circ .$$

ניתן לפתור מהר יותר, בעזרת טריגו במרחב.

מישור BCN **הוא חלק ממישור פאת הפירמידה** BCE **, וישר החיתוך שלו עם הבסיס הוא המקצוע** BC**.**

כיוון ש- BC **מאונך ל-** BO**, היטל של** EB **למישור הבסיס,**

הרי ש- BC **מאונך למשופע** EB **, על פי משפט שלושת האנכים.**

והזווית המבוקשת היא $\sphericalangle EBO$ **, המתקבלת במשולש** EBO**.**

$$\tan\sphericalangle EBO=\frac{EO}{BO}=\frac{12}{4}=3 \quad \rightarrow \sphericalangle EBO=71.565^\circ ,$$

תשובה: הזווית בין המישור BCN **ובין בסיס הפירמידה** $OBCD$ **היא בת** 71.565° **.**

ד. $KOBCD$ **היא פירמידה ישרה, לכן הגובה יורד למרכז המעגל החוסם את הבסיס (נסמן ב-** T **),**
שהוא מפגש אלכסוני הבסיס $OBCD$, **החוצים זה את זה, ווקטור הכיוון שלו הוא** $\underline{x}=(0,0,1)$ **, המאונך לבסיס.**

$x_T=\frac{x_B+x_D}{2}=\frac{0+4}{2}=2$, $y_T=\frac{y_B+y_D}{2}=\frac{4+0}{2}=2$ **, ומכאן ששיעורי הנקודה הם** $T(2,2,0)$ **.**

תשובה: הצגה הפרמטרית של הישר, שעליו מונח הגובה לבסיס מן הנקודה K **, היא** $\underline{x}=(2,2,0)+q(0,0,1)$ **.**

א. נסמן: $z = r\ cis\ \theta$ **,** $z \neq 0$ **, ובהתאם** $\bar{z} = r\ cis\ (-\theta)$ **.**

נפתור את המשוואה $z^3 = \bar{z}$ **.**

$$(r\ cis\ \theta)^3 = r\ cis\ (-\theta)$$
$$r^3 cis\ 3\theta = rcis\ (-\theta) \quad / : cis\ (-\theta) \neq 0$$
$$\boxed{r=1}\ \ ,\ 4\theta = 360°k \quad \rightarrow \theta = 90°k$$
$$z_1 = cis\ 0° = 1 \quad z_2 = cis\ 90° = i$$
$$z_3 = cis\ 180° = -1 \quad z_4 = cis\ 270° = -i$$

תשובה: הפתרונות הם $cis\ 0° = 1$ **,** $cis\ 90° = i$ **,** $cis\ 180° = -1$ **,** $cis\ 270° = -i$ **.**

ב. (1) נסמן: $z = r\ cis\ \theta$ **,** $z \neq 0$ **, ובהתאם** $\bar{z} = r\ cis\ (-\theta)$ **.**

נמצא את משוואת המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, במישור גאוס, המקיימות $z^2 \cdot (\bar{z})^2 = 1$ **.**

$$(r\ cis\ \theta)^2 \cdot (r\ cis\ (-\theta))^2 = 1$$
$$r^2 cis\ 2\theta \cdot r^2 cis\ (-2\theta) = 1$$
$$r^4 cis(0)° = 1 \quad \rightarrow r^4 = 1 \quad \rightarrow r = 1$$

בהתאם, כל הנקודות נמצאות במרחק של יחידה אחת מהראשית, ונמצאות על המעגל $x^2 + y^2 = 1$ **.**

תשובה: משוואת המקום הגיאומטרי היא $x^2 + y^2 = 1$ **.**

(2) גם בסעיף א מצאנו כי $r = 1$ **(ראה מסגרת) עבור ארבעת הפתרונות.**

תשובה: הוכח.

ג. (1) כל אחת מהנקודות, המתאימות לפתרונות, שמצאנו בסעיף א, סובבה בזווית של $45°$ **.**

לדוגמה: הפתרון $cis\ 0° = 1$ **.**

לכן, לאחד ההזזה, הנקודה המתאימה היא $cis\ 45°$ **.**

נתון, שהמספר המתאים מקיים $z^4 = a$ **, ומכאן ש-** $(cis\ 45°)^4 = a \quad \rightarrow cis\ 180° = a \quad \rightarrow \boxed{a=-1}$ **.**

תשובה: $a = -1$

(2) כל אחת מהנקודות, המתאימות לפתרונות, שמצאנו בסעיף א, סובבה בזווית של α **.**

המספרים המתאימים הם: $cis\ \alpha$ **,** $cis\ (90° + \alpha)$ **,** $cis\ (180° + \alpha)$ **,** $cis\ (270° + \alpha)$ **.**

נשים לב: $cis\ (180° + \alpha) = -cis\ \alpha$ **, ו-** $cis\ (270° + \alpha) = -cis\ (90° + \alpha)$ **,**

כי בכל זוג, הפרש הארגומנטים (הזוויות) הוא $180°$ **, ולכן הם מספרים נגדיים.**

קבלנו שני זוגות של מספרים נגדיים, שסכומם 0 **, ולכן סכום ארבעת המספרים המתאימים שווה ל-** 0 **.**

תשובה: הוכח.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{e^{ax}-e^{x}}{e^{ax}-3e^{x}+2}$.

נתון כי לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית $x=\ell n\,2$ **, ולכן** $x=\ell n\,2$ **מאפס מכנה, ולא מונה.**

$$e^{a\ell n\,2}-3e^{\ell n\,2}+2=0$$
$$(e^{\ell n\,2})^{a}-3\cdot 2+2=0$$
$$2^{a}=4\quad\rightarrow\boxed{a=2}$$

תשובה: $a=2$.

ב. נציב $a=2$ **ונקבל את הפונקציה** $f(x)=\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-3e^{x}+2}$.

נפרק לגורמים את הביטוי במכנה ובמונה, ונמצא את תחום ההגדרה, וביטוי אלגברי נוח יותר לפונקציה.

$$f(x)=\frac{e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-3e^{x}+2}=\frac{e^{x}(e^{x}-1)}{(e^{x}-2)(e^{x}-1)}\quad\rightarrow f(x)=\frac{e^{x}}{(e^{x}-2)}(x\neq 0\,,x\neq \ell n\,2)$$.

פירוק זה מאפשר לגלות את נקודת אי הרציפות הסליקה ("חור") של הפונקציה,

על ידי הצבת $x=0$ **בצורה המצומצמת, ונקודה זו היא** $(0,-1)$.

תשובה: תחום ההגדרה $x\neq 0\,,x\neq \ell n\,2$ **, ו-** $f(x)=\dfrac{e^{x}}{(e^{x}-2)}(x\neq 0\,,x\neq \ell n\,2)$.

ג. (1) נמצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים .

אסימפטוטה אנכית $x=\ell n\,2$ **(נתון, הסבר אפשרי: מאפס מכנה, ולא מונה).**

$f(10)=\dfrac{e^{10}}{e^{10}-2}=1.00009$ **, ו-** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

$f(-10)=\dfrac{e^{-10}}{e^{10}-2}=-2\cdot 10^{-5}$ **, ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל.**

הסבר:

כאשר $x\rightarrow +\infty$ **,** $e^{x}\rightarrow +\infty$ **, לכן** $f(x)=\dfrac{e^{x}}{e^{x}-2}\rightarrow \dfrac{e^{x}}{e^{x}}=1$ **ו-** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית.**

כאשר $x\rightarrow -\infty$ **,** $e^{x}\rightarrow 0$ **. לכן** $f(x)=\dfrac{e^{x}}{e^{x}-2}\rightarrow \dfrac{0}{0-2}=0^{-}$ **ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית.**

תשובה: $y=1$ **אסימפטוטה אופקית (לימין), כאשר** $x\rightarrow +\infty$.

$y=0$ **אסימפטוטה אופקית (לשמאל), כאשר** $x\rightarrow -\infty$.

אסימפטוטה אנכית: $x=\ell n\,2$.

(הערה – די בהצבות, ואפילו רק במסקנות, לתשובה מלאה בבגרות.)

(2) נמצא את תחומי העלייה והירידה.

$$f(x)=\frac{e^x}{(e^x-2)}(x\neq 0, x\neq \ell n\,2)$$

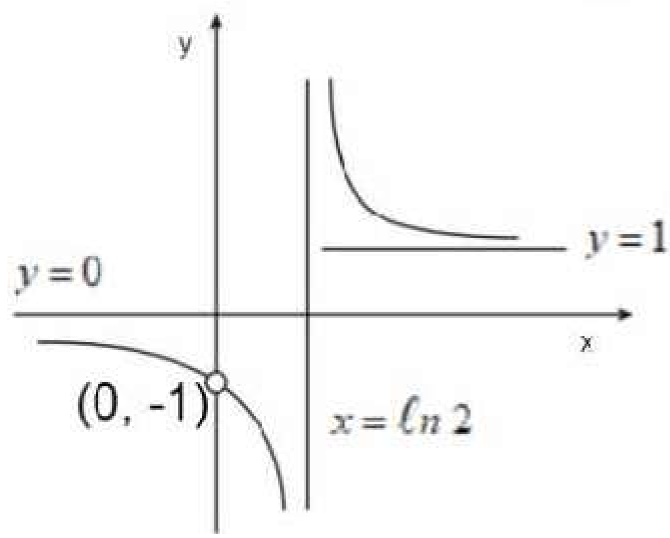
$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-2)-e^x\cdot e^x}{(e^x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot e^x-2e^x-e^x\cdot e^x}{(e^x-2)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-2e^x}{(e^x-2)^2}} \quad \to f'(x)<0 \quad (x\neq 0, x\neq \ell n\,2)$$

תשובה: ירידה - $x>\ell n\,2$ **או** $x<\ell n\,2, x\neq 0$ **. עלייה - אף** x **.**

(3) סקיצה מתאימה



ד. מגדירים פונקציה $(x\neq \ell n\,2)$ $h(x)=\left|\frac{e^x}{(e^x-2)}-\frac{1}{2}\right|$ **.**

נשים לב שלא נרשם $h(x)=\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|$ **, ולכן תחום ההגדרה רחב יותר.**

אולם, למעט נקודת אי הרציפות, זו הזזה של $\frac{1}{2}$ **יחידות כלפי מטה של** $f(x)$ **,**

ולאחר מכן, היפוך (סימטרי לציר ה- x **) של הענף השמאלי של** $f(x)$ **.**

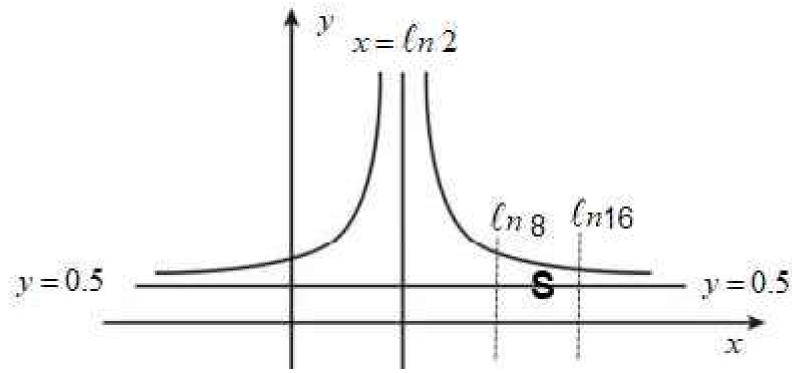
(1) על פי ההזזות שפורטו, ניתן למצוא ישירות את האסימפטוטות המאונכות לצירים של $h(x)$ **.**

תשובה: $y=0.5$ **אסימפטוטה אופקית (לימין), כאשר** $x\to+\infty$ **.**

$y=0.5$ **אסימפטוטה אופקית (גם לשמאל !!!** $-(0-0.5)=0.5$ **), כאשר** $x\to-\infty$ **.**

אסימפטוטה אנכית: $x=\ell n\,2$.

(2) סקיצה מתאימה (כולל סימון השטח, עבור סעיף (3)):



(3) נחשב את השטח המבוקש, על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית.

עבור $x>\ell n\,2$ **מתקיים:** $h(x)=\frac{e^x}{(e^x-2)}-\frac{1}{2}$**.**

נציין כי מכיוון שהביטוי e^x-2 **חיובי בתחום המבוקש, לא נדרש ערך מוחלט באינטגרל הבא.**

$$S=\int_{\ell n8}^{\ell n16}\left(\frac{e^x}{e^x-2}-\frac{1}{2}\right)dx$$
$$S=\int_{\ell n8}^{\ell n16}\left(\frac{1}{e^x-2}\cdot e^x-\frac{1}{2}\right)dx$$
$$S=\ell n\,(e^x-2)-0.5x\Big]_{\ell n8}^{\ell n16}$$
$$x=\ell n16 \quad \ell n\,14-\ell n\,4\sim 1.253$$
$$x=\ell n8 \quad \ell n\,6-\ell n\sqrt{8}\sim 0.752$$
$$\boxed{S\sim 0.500724}$$

תשובה: השטח המבוקש הוא 0.500724**.**

ה. נתון כי $h(x)$ **סימטרית ביחס לישר** $x=\ell n\,2$ **.**

כאשר, הנקודות A **ו-** B **שעל הפונקציה סימטריות ביחס לישר זה.**

לכן, אם $x_{\text{A}}=\ell n\,8$ **, אז:** $\ell n\,8-\ell n\,2=\ell n\,2-x_{\text{B}}$**.**

$$\left.\begin{array}{l} x_{\text{B}}=2\ell n\,2-\ell n\,8=\ell n\,4-\ell n\,8=\ell n\,0.5 \\ y_{\text{B}}=\left|\frac{e^{\ell n\,0.5}}{e^{\ell n\,0.5}-2}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{0.5}{0.5-2}-\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{5}{6}\right|=\frac{5}{6}\end{array}\right\}\boxed{\text{B}(\ell n\,0.5,\ \frac{5}{6})}$$

נשים לב, שעבור עבור $x<\ell n\,2$ **מתקיים:** $h(x)=-\left(\frac{e^x}{(e^x-2)}-\frac{1}{2}\right)$**.**

תשובה: $\text{B}(\ell n\,0.5,\ \frac{5}{6})$**.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)$, גזירה לכל x , בתחום ההגדרה שלה.

נסמן $h(x)=e^{f(x)}$, ולכן גם ל $h(x)$ תחום הגדרה זהה לזה של $f(x)$.

$h'(x)=e^{f(x)}f'(x)$, ומכיוון ש- $e^{f(x)}$ חיובית לכל x , בתחום ההגדרה של $f(x)$,

הרי שסימני הנגזרת של שתי הפונקציות זהים (בתחום ההגדה הזהה).

תחומי העלייה והירידה זהים אף הם, ונקודות הקיצון (באם קיימות) הן מאותו סוג, ועבור אותם x-ים.

תשובה: הוכח.

ב. נתונה הפונקציה $f(x)=x\ell n\,(x^n)$, גזירה לכל x, n הוא פרמטר טבעי.

תשובה: עבור n טבעי זוגי, תחום ההגדרה הוא $x\neq 0$ (כי הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית יהיה חיובי).

עבור n טבעי אי- זוגי, תחום ההגדרה הוא $x>0$.

ג. לכל n טבעי, אין נקודת חיתוך עם ציר ה- y .

נמצא נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

$$0=x\ell n\,(x^n)$$
$$\ell n\,(x^n)=0$$
$$x^n=1$$
$$n\ odd\ x=1 \quad or \quad n\ even\ x=\pm 1$$

תשובה: עבור n טבעי זוגי, $(1,0)$, $(-1,0)$.

עבור n טבעי אי- זוגי, $(1,0)$.

ד. גרף הפונקציה $f(x)=x\ell n\,(x^n)$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות.

מכאן ש- n טבעי זוגי, ונקודות החיתוך הן $(1,0)$, $(-1,0)$.

(1) נראה שהפונקציה היא אי-זוגית.

$$f(-x)=(-x)\ell n\left[(-x)^n\right]$$
$$f(-x)=-x\ell n\,(x)^n \quad \leftarrow n\ is\ even$$
$$\boxed{f(-x)=-f(x)}$$

תשובה: הוכח.

(2) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון ונקבע את סוגן (נשים לב שתואמות את אי-זוגיות הפונקציה).

$$\boxed{f(x) = x\ell n\,(x^n)}$$

$$f'(x) = \ell n\,(x^n) + x \cdot \frac{nx^{n-1}}{x^n}$$

$$\boxed{f'(x) = \ell n\,(x^n) + n}$$

$$0 = \ell n\,(x^n) + n$$

$$\ell n\,(x^n) = -n$$

$$x^n = e^{-n}$$

$$x = \pm e^{-1} \quad \leftarrow n \textit{ is even}$$

$$x = \pm\frac{1}{e}$$

$$f''(x) = \frac{nx^{n-1}}{x^n} \quad \rightarrow f''(x) = \frac{n}{x}$$

$$f''(\frac{1}{e}) > 0 \quad \rightarrow \boxed{\min \quad (\frac{1}{e}, -\frac{n}{e})}$$

$$f''(-\frac{1}{e}) < 0 \quad \rightarrow \boxed{\max \quad (-\frac{1}{e}, \frac{n}{e})}$$

תשובה: $(\frac{1}{e}, -\frac{n}{e})$ **מינימום,** $(-\frac{1}{e}, \frac{n}{e})$ **מקסימום (תואמות את אי-זוגיות הפונקציה).**

(3) נתון כי $n = 2$**, ובהתאם** $f(x) = x\ell n\,(x^2)$ **, תחום ההגדרה הוא** $x \neq 0$**,**

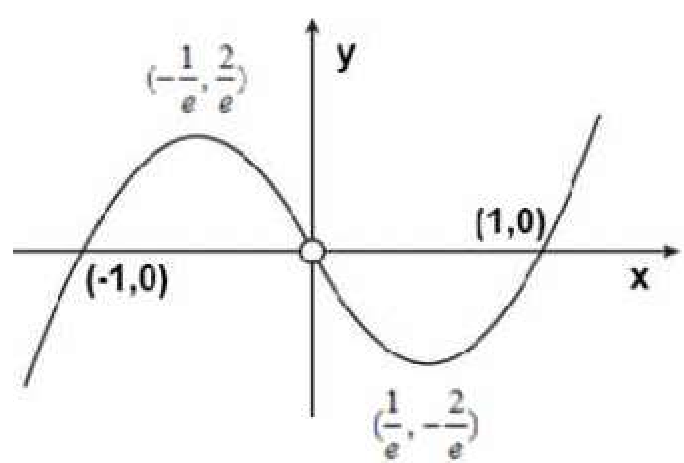
נקודות החיתוך עם ציר ה- x **הן** $(1,0)$, $(-1,0)$ **ונקודות הקיצון הן** $(\frac{1}{e}, -\frac{2}{e})$ **מינימום,** $(-\frac{1}{e}, \frac{2}{e})$ **מקסימום.**

כאשר $x \to 0$ **(משני הצדדים) נקבל ש-** $f(x) = x\ell n\,(x^2) \to 0$ **-**

ניתן לקבל זאת על ידי הצבות, להבין גם כי $x \to 0$ **מהר יותר מאשר** $\ell n\,(x^2) \to -\infty$ **.**

לכן, ראשית הצירים היא נקודת אי רציפות סליקה.

כמו כן, עבור $x \to \pm\infty$ **(משני הצדדים) נקבל ש-** $f(x) = x\ell n\,(x^2) \to 0$ **ואין אסימפטוטות אופקיות.**



ה. נסמן $h(x)=e^{x\ell n(x^n)}$ (n פרמטר טבעי).

n טבעי זוגי, כי נתון, לפני סעיף ד, כי גרף הפונקציה $f(x)=x\ell n(x^n)$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות.

על פי סעיף א, לשתי הפונקציות, אותו סוג של נקודות קיצון, עבור שיעורי x זהים, אם כי כמובן ערכי y שונים.

תשובה : $(\frac{1}{e},e^{-\frac{n}{e}})$ מינימום, $(-\frac{1}{e},e^{\frac{n}{e}})$ מקסימום.