א. נתונה האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **, כאשר** $a>b>0$ **.**

אורך הציר הגדול הוא 13**, ולכן:** $2a=13$ **ו-** $a=6.5$**.**

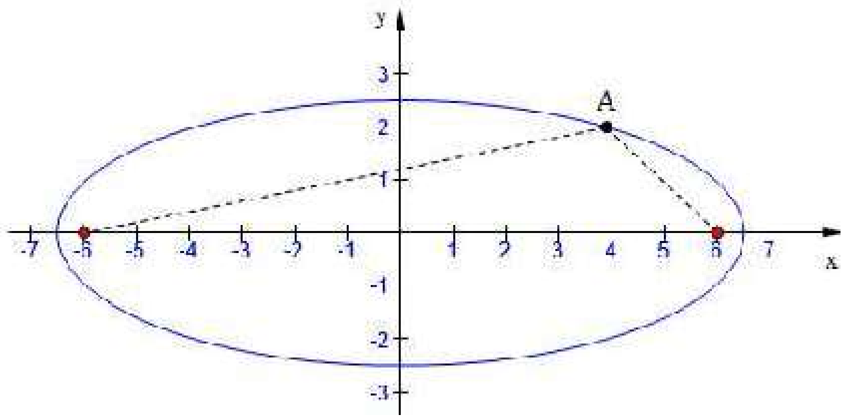
הנקודה A **ברביע הראשון, כאשר היקף** ΔF_1AF_2 **הוא** 25**.**

באליפסה, סכום המרחקים של כל נקודה שעליה מהמוקדים (F_1,F_2 **) הוא** $2a$ **,**

לכן: $2c+13=25$ **ו-** $c=6$ **.**

באליפסה מתקיים גם $c^2=a^2-b^2$ **, ובהתאם:** $b^2=6.5^2-6^2=6.25$ **.**

תשובה: משוואת האליפסה היא $\frac{x^2}{42.25}+\frac{y^2}{6.25}=1$ **.**

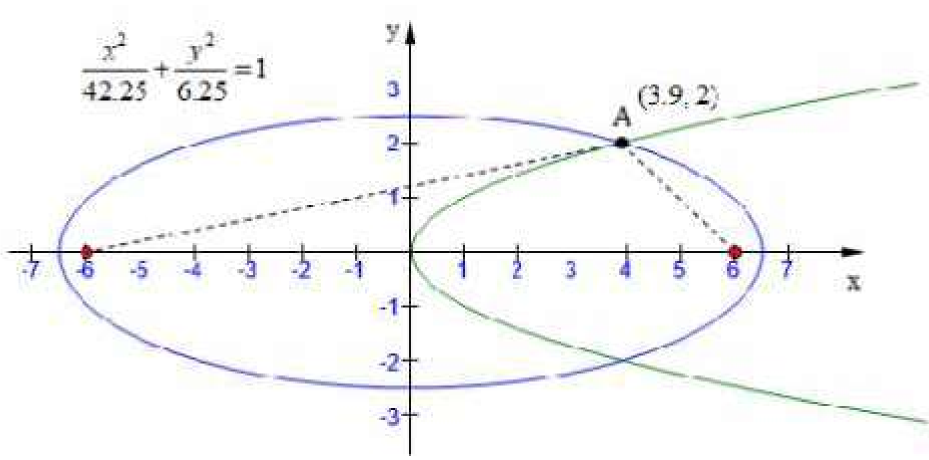


ב. נתון כי שטח ΔF_1AF_2 **הוא** 12**.**

$$\frac{2c\cdot y_A}{2}=12 \quad \rightarrow 6\cdot y_A=12 \quad \rightarrow y_A=2 .$$

נציב $y_A=2$ **במשוואת האליפסה:** $(1st\ quadrant)$ $\quad \frac{x^2}{42.25}+\frac{2^2}{6.25}=1 \quad \rightarrow \frac{x^2}{42.25}=\frac{25}{16} \quad \rightarrow x_A=3.9$ **.**

תשובה: שיעורי הנקודה הם $A(3.9,2)$ **.**

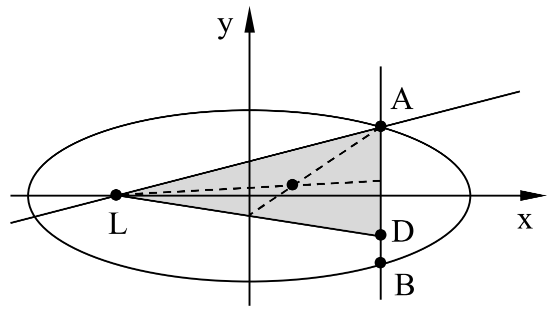


ג. הנקודה $A(3.9, 2)$ נמצאת על הפרבולה $y^2 = 2px$.

$y_L = 0$, כאשר הנקודה L על המשיק העובר בנקודה $A(3.9, 2)$.

משוואת משיק לפרבולה, בנקודה שעל הפרבולה היא $yy_0 = p(x + x_0)$. לכן: $x_L = -x_A = -3.9$.

תשובה: $x_L = -3.9$.



ד. הפרבולה והאליפסה נחתכות בנקודה נוספת B .

עקב הסימטריה של שתי העקומות לציר ה- x , הרי ש- $x_B = x_A = 3.9$.

ומכאן שגם $x_D = x_A = 3.9$ ושיעור ה- x של אמצע הצלע AD הוא גם 3.9.

תיכונים חותכים זה את זה ביחס $2:1$ מהקודקוד, וזה גם היחס שיחלקו את התיכון היוצא מ- L, לצלע AD .

מכאן, שמה שמשותף לכל נקודות מפגש התיכונים הוא שיעור ה- x שלהן: $x = \dfrac{1\cdot(-3.9) + 2\cdot 3.9}{3} = 1.3$.

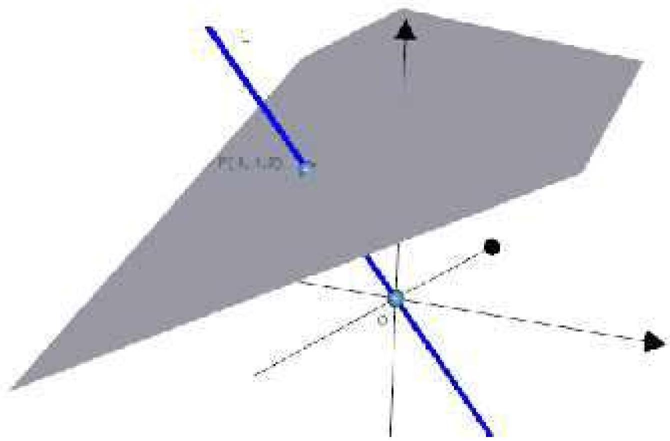
תשובה: המקום הגיאומטרי, שעליו נמצאות כל נקודות מפגשי התיכונים ב- ΔALD , הוא הישר $x = 1.3$.

א. הישר ℓ **עובר בראשית הצירים** B **ובנקודה** $P(-1,-1,2)$**, ולכן משוואתו היא** $\ell = \underline{x} = s(-1,-2,2)$ **.**

ישר זה מאונך למישור π**, ולכן משוואת המישור היא** $\pi: -x-y+2z+d=0$ **.**

הנקודה $P(-1,-1,2)$ **נמצאת אף היא על המישור, ולכן:** $-(-1)-(-1)+2\cdot 2+d=0$ **ונקבל** $d=-6$ **.**

תשובה: משוואת המישור היא $\pi: -x-y+2z-6=0$ **(או** $\pi: x+y-2z+6=0$**).**



ב. (1) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=z=0$**, ולכן** $-x-0+2\cdot 0-6=0$ **,** $x_A=-6$ **, ו-** $A(-6,0,0)$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=z=0$**, ולכן** $-0-y+2\cdot 0-6=0$ **,** $y_A=-6$ **ו-** $B(0,-6,0)$ **.**

תשובה: $A(-6,0,0)$ **,** $B(0,-6,0)$ **.**

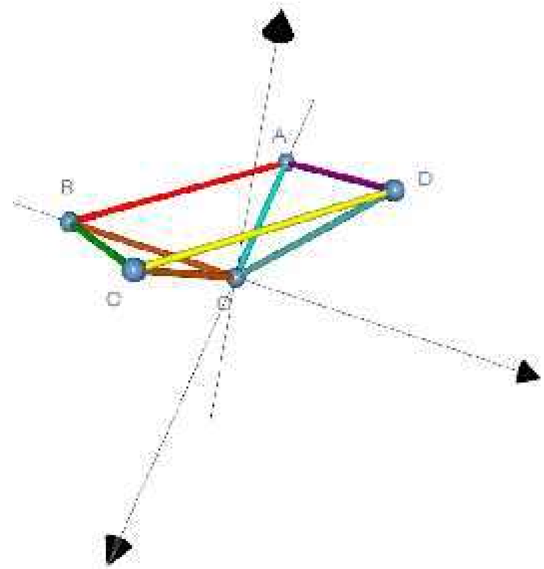
(2) הנקודה $P(-1,-1,2)$ **היא מפגש אלכסוני המלבן** $ABCD$ **, שכן היא מרכז מעגל חוסם,**

כאשר OP **, גובה הפירמידה הישרה** $OABCD$**, יורד למרכז המעגל החוסם.**

את שיעורי שני הקודקודים האחרים של המלבן נקבל באמצעות נוסחת אמצע קטע.

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{x_C-6}{2}=-1 \\ \dfrac{y_C+0}{2}=-1 \\ \dfrac{z_C+0}{2}=2 \end{matrix}\right\} C(4,-2,4) \qquad \left.\begin{matrix} \dfrac{x_D+0}{2}=-1 \\ \dfrac{y_D-6}{2}=-1 \\ \dfrac{z_D+0}{2}=2 \end{matrix}\right\} D(-2,4,4)$$

תשובה: $C(4,-2,4)$ **,** $D(-2,4,4)$ **.**



ג. גובה הפאה AOB **הוא גם תיכון לצלע** AB **, כאשר** PT **הוא אנך מהבסיס לישר החיתוך** AB **.**

הזווית בין הפאה למישור הבסיס היא $\sphericalangle OTP$ **, שבין שני אנכים לישר החיתוך.**

הסבר ארוך למתעניינים (לא נדרש בבגרות).

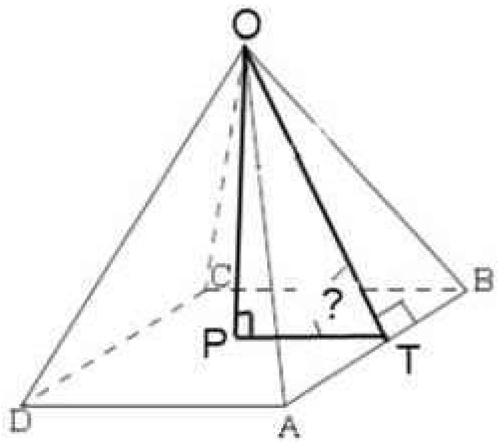
פאות הפירמידה הן משולשים שווי שוקיים, כי המקצועות הצדדיים שווים זה לזה בפירמידה ישרה.

הזווית, שבין הפאה הצדדית (AOB **) לבסיס הפירמידה** $ABCD$ **,**
היא הזווית בין שני האנכים לישר החיתוך (מקצוע הבסיס AB **).**

נוריד גובה OT **מהפאה למקצוע הבסיס, ולכן הוא גם תיכון.**

PT **הוא אנך מהבסיס, כי הוא קטע אמצעים ב-** ΔDAB **, ולכן גם מקביל לצלע** AD **ובהתאם מאונך ל-** AB **.**

הזווית בין הפאה למישור הבסיס היא $\sphericalangle OTP$.



$\underline{\Delta OPT}$

$$\tan\sphericalangle OTP = \frac{OP}{PT} = \frac{OP}{0.5AD}$$

$$OP = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$AD = \sqrt{(-6+2)^2 + (0-4)^2 + (0-4)^2} = 4\sqrt{3}$$

$$\tan\sphericalangle OTP = \frac{\sqrt{6}}{0.5 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\sphericalangle OTP = 35.26°}$$

תשובה: הזווית, שבין הפאה הצדדית AOB **, לבין בסיס הפירמידה היא בת** $35.26°$ **.**

ד. (1) $F(-4,-2,0)$ **,** $G(-2,-4,0)$ **.**

$$\left.\begin{aligned}|FG| &= \sqrt{(-4+2)^2+(-2+4)^2+(0-0)^2} = 2\sqrt{2}\\ |AB| &= \sqrt{(-6-0)^2+(0+6)^2+(0-0)^2} = 6\sqrt{2}\end{aligned}\right\} \boxed{|FG| = \frac{1}{3}|AB|}$$

תשובה: הראינו כי $|FG| = \frac{1}{3}|AB|$**.**

(2) נדרש שנפח הפירמידה $OFGHI$ **יהיה** $\frac{1}{3}$ **מנפח הפירמידה** $OABCD$.

האפשרות הנוחה היא שהבסיסים שלהן יהיו מלבנים, שמונחים על אותו מישור של $ABCD$ **,**
כאשר יחס שטחי הבסיס הוא $1:3$ **, כאשר גובה הפירמידה** OP **יהיה זהה.**

כיוון ש- $|FG| = \frac{1}{3}|AB|$**, הכי נוח לבחור את שני קודקודי המלבן האחרים, שיהיו מונחים על** CD **,**
ואז הצלע הסמוכה תהייה באותו אורך כמו של AD **.**

אפשרות אחרת היא בנייה של מקבילית (במקום מלבן, והפירמידה החדשה לא תהייה ישרה),
כאשר גם כאן נמקם את שני הקודקודים האחרים על הצלע CD**.**

כמו כן, ניתן למקם את שני הקודקודים האחרים על ישר אחר שמקביל ל CD**,**
כאשר AB **הוא מקביל אמצעי...**

לדוגמה הפשוטה:

$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AF}$	$\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AG}$
$\underline{H} - \underline{D} = \underline{F} - \underline{A}$	$\underline{I} - \underline{D} = \underline{G} - \underline{A}$
$\underline{H} = \underline{F} - \underline{A} + \underline{D}$	$\underline{I} = \underline{G} - \underline{A} + \underline{D}$
$H(0,2,4)$	$I(2,0,4)$

תשובה: שתי נקודות אפשריות הן: $H(0,2,4)$, $I(2,0,4)$ **(יש אינסוף אפשרויות כמובן).**

א. נפתור את המשוואה $z^3=-1$ **, בשתי דרכים.**

הראשונה: נמצא את הפתרונות של המשוואה $z^3=-1$ **, על-פי נוסחת השורשים של מספר מרוכב.**

$$z^3=-1$$
$$z^3=cis\,180°$$
$$z_k=cis\,(\frac{180°}{3}+\frac{360°k}{3})=cis\,(60°+120°k)$$
$$z_0=cis\,(60°)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_1=cis\,(180°)=-1$$
$$z_2=cis\,(300°)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

השנייה: כיוון שקל למצוא פתרון אחד שהוא -1 **(פתרון ממשי),**

וידוע שפתרונות משוואה $z^n=r\,cis\vartheta$ **מהווים סדרה הנדסית שמנתה** $cis(\frac{360^\circ}{n})$**,**

מקבלים מיידית את שני הפתרונות הבאים.

תשובה: הפתרונות הם $cis\,(60°)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **,** $cis\,(180°)=-1$ **,** $cis\,(300°)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **.**

ב. נתונה סדרה הנדסית a_n **, שבה:** $q=2i=2cis\,90^\circ$ **.**

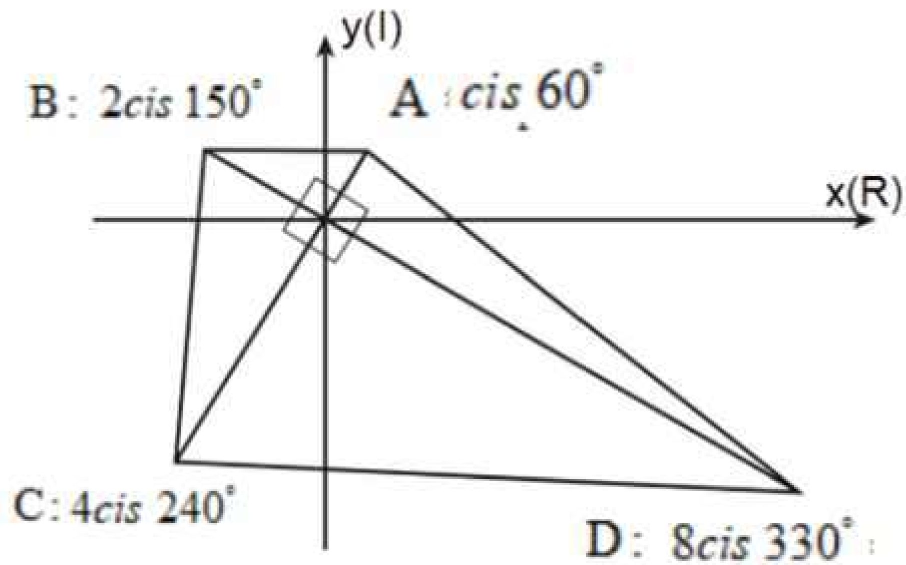
$$a_{n+4}=a_nq^4=a_n(2i)^4=a_n\cdot 2^4\cdot i^4=a_n\cdot 16\cdot 1=16a_n$$

תשובה: הראינו כי לכל n **טבעי מתקיים** $a_{n+4}=16a_n$ **.**

ג. $A = a_1 = cis\,60^\circ$ **, כי נקודה זו ברביע הראשון.**

(1) נמצא את שלושת האיברים הבאים.

$$B: a_2 = a_1 q = cis\,60^\circ \cdot 2cis\,90^\circ = 2cis\,150^\circ = -\sqrt{3} + i$$
$$C: a_3 = a_2 q = 2cis\,150^\circ \cdot 2cis\,90^\circ = 4cis\,240^\circ = -2 - 2\sqrt{3}i$$
$$D: a_4 = a_3 q = 4cis\,240^\circ \cdot 2cis\,90^\circ = 8cis\,330^\circ = 4\sqrt{3} - 4i$$



תשובה: הסקיצה מעל.

(2) כיוון שהארגומנטים של הקודקודים הנגדיים הם בהפרשים של 180° **, הרי שהאלכסונים עוברים בראשית .**

כיוון שהארגומנטים של הקודקודים הסמוכים הם בהפרשים של 90° **, הרי שהאלכסונים מאונכים זה לזה.**

שטח מרובע, שאלכסוניו מאונכים זה לזה, הוא מחצית מכפלת האלכסונים.

כיוון שהאלכסונים עוברים בראשית, הרי ש:

$$AC = r_A + r_C = 1 + 4 = 5$$
$$BD = r_B + r_D = 2 + 8 = 10$$
$$\boxed{S_{ABCD} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25}$$

תשובה: שטח המרובע ABCD **הוא** 25 **.**

ד. ארבעת האיברים הבאים בסדרה מייצגים קודקודי מרובע A'B'C'D' **.**

על פי סעיף ב : $a_{n+4} = 16a_n$ **, ולכן אין שינוי בארגומנטים (בהתאמה, כמובן) והערך המוחלט גדל פי** 16 **.**

מכאן שאורכי האלכסונים (שעדיין מאונכים זה לזה) גדלים גם פי 16**, הרי ששטח המרובע גדל פי** $256 = 16^2$**.**

תשובה: $\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = 256$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=e^{(\frac{a}{x-1})}+c$ **(** a,c **פרמטרים).**

הפונקציה $e^{j(x)}$ **מוגדרת לכל** x **בו** $j(x)$ **מוגדרת, ולכן תחום ההגדרה הוא** $x\neq 1$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x\neq 1$ **.**

ב. $\frac{a}{x-1}$ **שואף ל-** 0 **כאשר** $x\to\pm\infty$ **, ולכן** $e^{(\frac{a}{x-1})}\to e^0=1$ **שואף ל-** 1**, כאשר** $x\to\pm\infty$**.**

ומכאן ש: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1+c$ **.**

נתון כי האסימפטוטה האופקית היא $y=1$ **, ולכן** $1+c=1$ **, ו-** $c=0$**.**

הנקודה $(0,e^{-4})$ **נמצאת על גרף הפונקציה** $f(x)=e^{(\frac{a}{x-1})}$**, ולכן:** $e^{-4}=e^{(\frac{a}{0-1})}$**, ומכאן** $-4=-a$ **ו-** $a=4$**.**

תשובה: $c=0$ **,** $a=4$**.**

ג. (1) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)=e^{(\frac{4}{x-1})}$ **.**

$$f'(x)=e^{(\frac{4}{x-1})}\cdot(\frac{-4}{(x-1)^2})$$

$$\boxed{f'(x)=-\frac{4e^{(\frac{4}{x-1})}}{(x-1)^2}}$$

הנגזרת שלילית עבור $x\neq 1$ **.**

תשובה: עלייה – אף x **, ירידה -** $x>1$ **או** $x<1$ **.**

(2) תשובה: נמצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)=e^{(\frac{4}{x-1})}$ **.**

הפונקציה $e^{j(x)}$ **חיובית לכל** x **בו** $j(x)$ **מוגדרת, ולכן תחום החיוביות הוא** $x\neq 1$ **.**

תשובה: שליליות – אף x **, חיוביות -** $x>1$ **או** $x<1$ **.**

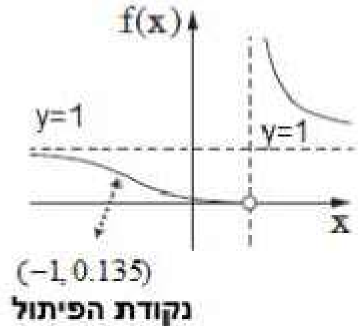
ד. נתון כי לפונקציה $f(x)=e^{(\frac{4}{x-1})}$ **יש נקודת פיתול יחידה, בנקודה שבה** $x=-1$ **.**

(1) נבדוק את התנהגות הפונקציה, כאשר $x\to 1$ **מימין ומשמאל.**

נציב $x=0.9$ **ונקבל** $4.2\cdot 10^{-18}$ **, כלומר שאיפה ל-** $(1,0)$ **משמאל (נקודה ריקה).**

נציב $x=1.1$ **ונקבל** $2.4\cdot 10^{17}$ **, כלומר הישר** $x=1$ **הוא אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה מימין.**

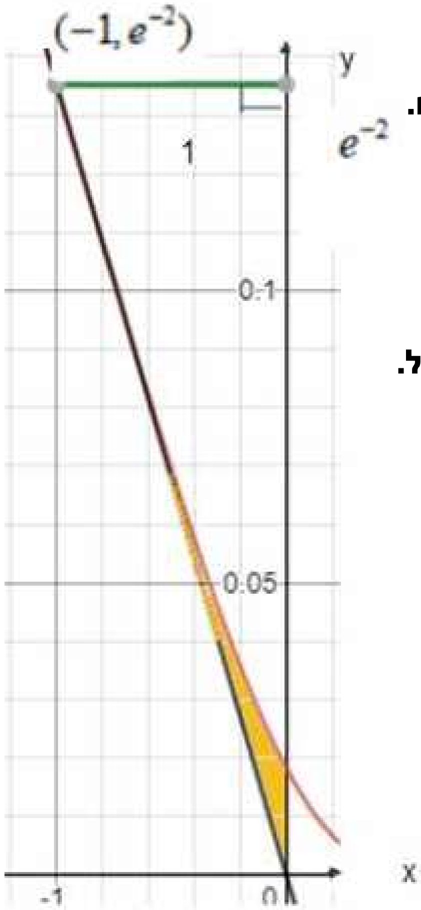
בסרטוט נשים לב גם לאסימפטוטה האופקית הנתונה, ולנקודת הפיתול $(-1,e^{-2})$ **.**



תשובה: הסרטוט מעל.

(2) הישר $y=k$ **חותך את הפונקציה מעל האסימפטוטה האופקית, ובינה לבין ציר ה-** x **.**

תשובה: $k>1$ **או** $0<k<1$ **.**



ה. על-פי תיאור השטח שבשאלה, המשיק בנקודת הפיתול עובר בראשית הצירים.

(ניתן, אבל ממש לא נדרש, גם לראות ש- $f'(-1)=e^{-2}$ **,**

ומשוואת המשיק בנקודת הפיתול היא $y=e^{-2}x$ **, שעובר בראשית הצירים).**

בנקודת הפיתול, המשיק חותך את גרף הפונקציה – ועל פי תחומי הקעירות,

עובר מתחת לגרף מימין לנקודת הפיתול, ומעל לגרף משמאל לנקודת הפיתול.

ולכן, השטח המבוקש (המסומן בצהוב),

קטן משטחו של המשולש שבציור משמאל, שהוא $\frac{1\cdot e^{-2}}{2}=\frac{1}{2}e^{-2}$ **.**

תשובה: הוכח שהשטח המתואר קטן מ- $\frac{1}{2}e^{-2}$**.**

א. נתונה פונקציית הנגזרת, של הפונקציה $f(x)$: $f'(x)=\frac{\ell n(-x)+2}{x}$ **.**

ל- $f(x)$, ל- $f'(x)$ ול- $f''(x)$ יש אותו תחום הגדרה.

(1) בתחום הגדרה, הארגומנט – הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית, צריך להיות חיובי,

לכן: $-x>0 \quad \to x<0$ **.**

וגם המכנה של הפונקציה צריך להיות שונה מ- 0**.**

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x<0$ **.**

(2) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$, בעזרת סימני $f'(x)$ המוגדרת באותו התחום.

$$\frac{\ell n(-x)+2}{x}=0$$

$$\ell n(-x)+2=0$$

$$\ell n(-x)=-2$$

$$-x=e^{-2}$$

$$x=-e^{-2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-e^{-1})<0 \\ f'(-e^{-3})>0 \end{array}\right\} x=-e^{-2}, \min$$

נשים לב, עבור סעיף ב(2) ש- $f'(-e^{-2})=0$ **.**

תשובה: עלייה - $-e^{-2}<x<0$ **, ירידה -** $x<-e^{-2}$ **.**

(3) נמצא את תחומי הקעירות של הפונקציה $f(x)$, בעזרת סימני $f''(x)$ המוגדרת באותו התחום.

$$f''(x)=\frac{\frac{-1}{-x}\cdot x-(\ell n\,(-x)+2)}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{1-\ell n\,(-x)-2}{x^2}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{-1-\ell n\,(-x)}{x^2}}$$

$$\frac{-1-\ell n\,(-x)}{x^2}=0$$

$$-1-\ell n\,(-x)=0$$

$$\ell n\,(-x)=-1$$

$$-x=e^{-1}$$

$$x=-e^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(-e^{-2})>0 \quad \to \cup \\ f''(-e^{-0.5})<0 \quad \to \cap \end{array}\right\} x=-e^{-1}, \textit{inflection point}$$

תשובה: קעירות כלפי מעלה ($\cup$) - $-e^{-1}<x<0$, קעירות כלפי מטה ($\cap$) - $x<-e^{-1}$.

ב. $f'(x)=\dfrac{\ell n\,(-x)+2}{x}$.

(1) נמצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים.

כאשר $x\to-\infty$, מתקבל ש- $\ell n\,(-x)+2$ שואף ל- $+\infty$ לאט יותר מאשר $x\to-\infty$, ו- $f'(x)\to 0^-$.

לכן $y=0$ אסימפטוטה אופקית , ומגיעים אליה מלמטה, כאשר הפונקציה $f'(x)$ בירידה.

בהצבה פשוטה, נקבל $f'(-10,000)=-1.1\cdot 10^{-3}\to 0^-$.

כאשר $x\to 0^-$, מתקבל ש- $\ell n\,(-x)+2$ שואף ל- $-\infty$ והמכנה שואף ל- 0^- ,

ולכן $f'(x)\to+\infty$ והישר $x=0$ אסימפטוטה אנכית, שמגיעים אליה בעלייה.

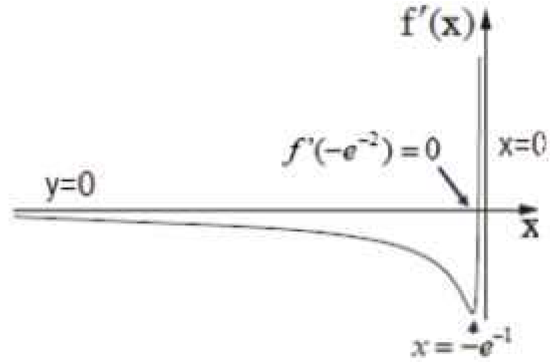
בהצבה פשוטה, נקבל $f'(-0.0001)=72,103\to+\infty$.

תשובה: כאשר $x\to-\infty$, $y=0$ אסימפטוטה אופקית, $x=0$ אסימפטוטה אנכית .

(2) נסרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת.

נשים לב לתחום ההגדרה, שתי האסימפטוטות, סימני הנגזרת, ל- $f'(-e^{-2})=0$ **,**

ולתחומי עלייה וירידה שלה (הדומים בהתאמה לתחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה של $f(x)$ **.**



תשובה: הסרטוט מעל .

ג. נתון כי $f(-e^{-2})=0$ **, וכידוע** $f'(x)=\dfrac{\ell n\,(-x)+2}{x}$ **.**

(1) נמצא ביטוי אלגברי לפונקציה $f(x)$ **.**

נעשה אינטגרל, על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית, ונשים לב ש: $(\ell n\,(-x)+2)'=\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x}$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$

$$f(x)=\int \frac{\ell n\,(-x)+2}{x}\,dx$$

$$f(x)=\int (\ell n\,(-x)+2)\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$f(x)=\frac{(\ell n\,(-x)+2)^2}{2}+c$$

$$0=\frac{(\ell n\,(-(-e^{-2}))+2)^2}{2}+c \quad \leftarrow f(-e^{-2})=0$$

$$0=\frac{(-2\ell n\,e+2)^2}{2}+c$$

$$c=0$$

$$\boxed{f(x)=\frac{(\ell n\,(-x)+2)^2}{2}}$$

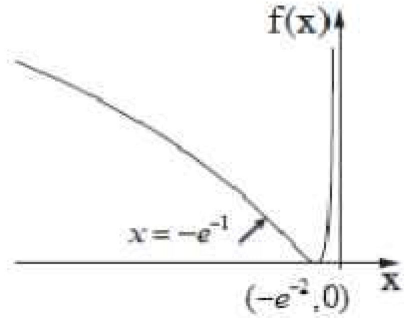
תשובה: $f(x)=\dfrac{(\ell n\,(-x)+2)^2}{2}$ **.**

(2) נסרטט סקיצה של גרף $f(x)=\frac{(\ell n(-x)+2)^2}{2}$ **.**

נשים לב לתחום ההגדרה, אי השליליות של הפונקציה, תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה,

נקודת המינימום ב- $(-e^{-2},0)$ **(בה הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות),**

ולתחומי עלייה וירידה שלה (הדומים בהתאמה סימני הנגזרת $f'(x)$ **).**



תשובה: הסרטוט מעל .