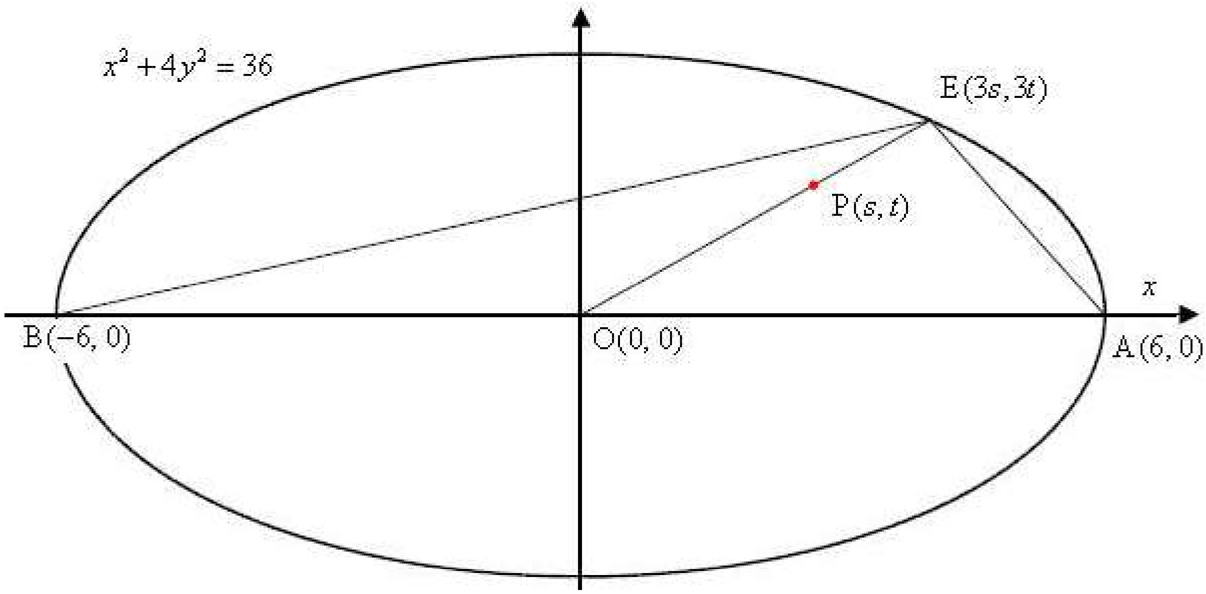
א. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



משוואת האליפסה $x^2+4y^2=36$ **ובהתאם:** $A(6,0)$ **,** $B(-6,0)$ **שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה-** x .

נסמן $P(s,t)$ **נקודת מפגש תיכוניים, על** OE **הוא תיכון לצלע** AB **, כאשר** $O(0,0)$.

נמצא את שיעורי הנקודה E **על פי נוסחה לחלוקת קטע ביחס נתון, כאשר תיכונים נחתכים ביחס של** $2:1$.

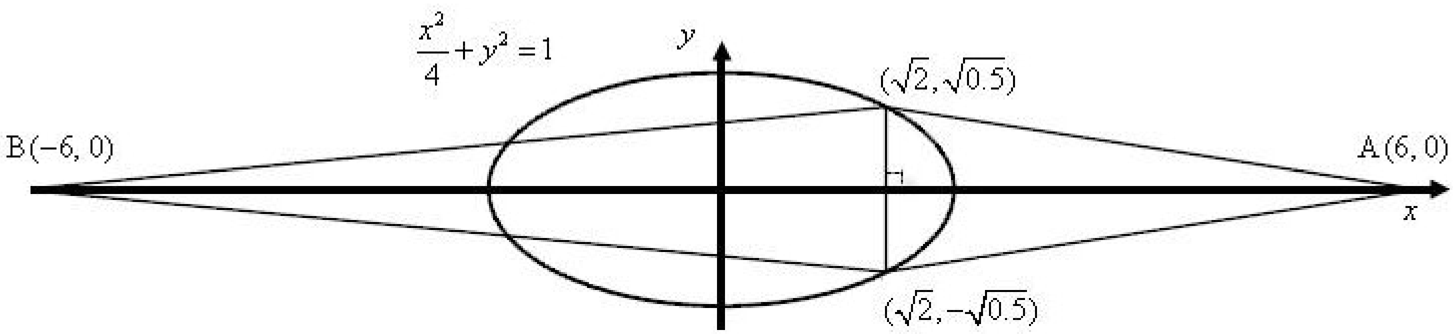
$$\left.\begin{array}{l} s=\dfrac{2\cdot 0+1\cdot x_E}{3}\rightarrow x_E=3s \\ t=\dfrac{2\cdot 0+1\cdot y_E}{3}\rightarrow y_E=3t \end{array}\right\} E(3s,3t)$$

נציב את שיעורי הנקודה במשוואת האליפסה:

$$(3s)^2+4(3t)^2=36 \quad \rightarrow 9s^2+36t^2=36$$

$$\frac{s^2}{4}+t^2=1 \quad \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{4}+y^2=1}$$

תשובה: האליפסה $\frac{x^2}{4}+y^2=1$



ב. נציב את $(\sqrt{2},y)$ **במשוואת האליפסה** $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

$\frac{(\sqrt{2})^2}{4}+y^2=1 \quad \rightarrow y=\pm\sqrt{0.5}$ **ושיעורי הקדקודים הם:** $(\sqrt{2},-\sqrt{0.5})$, $(\sqrt{2},\sqrt{0.5})$

המרובע שנוצר הוא דלתון ושטחו מחצית מכפלת האלכסונים

$$S=\frac{12\cdot 2\sqrt{0.5}}{2}=\frac{6\cdot 2}{\sqrt{2}}=\boxed{6\sqrt{2}}$$

תשובה: $6\sqrt{2}$ **יח"ר**

ג. (1) משוואת האליפסה הנתונה $x^2+4y^2=36$

כל שיעורי ה- y **במשוואת המעגל המקורית הוכפלו בקבוע, כאשר שיעורי ה-** x **קבועים,**

ולכן הנקודות $A(6,0)$ **,** $B(-6,0)$ **הן על המעגל המקורי, כאשר** AB **הוא הקוטר,**

מרכז המעגל הוא ראשית הצירים ורדיוסו 6**.**

תשובה: $x^2+y^2=36$

<u>דרך שנייה לפתרון:</u>

נרשום את משוואת האליפסה בדרך הבאה: $x^2+(2y)^2=36$

ומכאן שאת שיעורי המעגל המקוריים הכפילו בקבוע 2**, כדי לקבל את משוואת האליפסה הנתונה,**

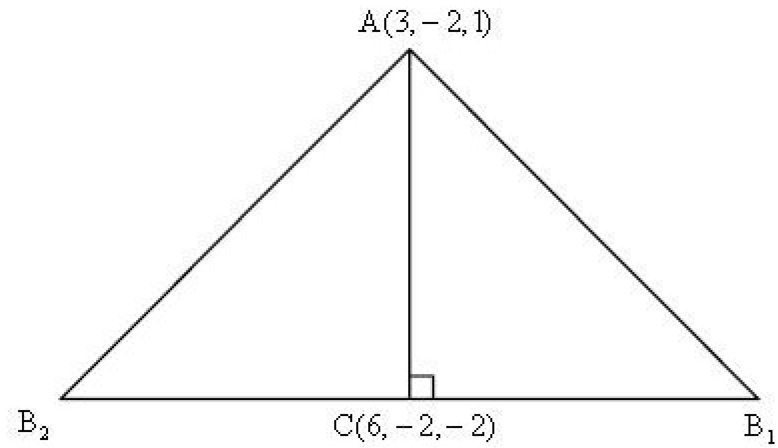
ולכן נחלק ב- 2 **ובהתאם משוואת המעגל היא** $x^2+y^2=36$ **.**

(2) האליפסה שמצאנו בסעיף א, $\frac{x^2}{4}+y^2=1$**, היא בעלת ציר גדול שאורכו** 4 **וציר קטן שאורכו** 1**.**

כיוון שמרכזה הוא ראשית הצירים, הרי שציריה קטנים מרדיוס המעגל ואין להם נקודות חיתוך.

תשובה: אין נקודות חיתוך.

א. נצייר את שני המשולשים האפשריים:



(1) תחילה ננצל את העובדה שהמשולש ישר זווית, כאשר נסמן את הקדקודים האפשריים $B(a,b,c)$

$$\overrightarrow{AC} = \underline{C} - \underline{A} = \underline{x} = (3,0,-3)$$

$$\overrightarrow{BC} = \underline{C} - \underline{B} = \underline{x} = (6-a,-2-b,-2-c)$$

$$(6-a,-2-b,-2-c)\,(3,0,-3) = 0$$

$$18-3a+6+3c = 0.$$

$$\underline{|c = a-8}$$

עתה נשתמש בעובדה שהמישור ABC **מקביל למישור** $\pi: 2x+y+2z-15=0$

ובהתאם משוואתו $\pi_{ABC}: 2x+y+2z+d=0$ **ונציב בו את שיעורי הנקודה** $A(3,-2,1)$

$$\pi_{ABC}: 2\cdot 3-2+2\cdot 1+d=0 \rightarrow d=-6 \rightarrow \pi_{ABC} = 2x+y+2z=6$$

נציב את שיעורי הנקודה $B(a,b,a-8)$ **ונקבל:** $2a+b+2(a-8)=6 \rightarrow \underline{|b = 22-4a}$

והמשוואה השלישית תתבסס על העובדה ש- $BC = AC$ **, כאשר** $B(a, 22-4a, a-8)$

$$\sqrt{(a-6)^2+(24-4a)^2+(a-6)^2} = \sqrt{3^2+0^2+(-3)^2} \quad \rightarrow 18a^2-216a+630=0$$

$$a_{1,2} = \frac{216 \pm 36}{36}$$

$$a=7 \quad \rightarrow \boxed{B_1(7,-6,-1)}$$

$$a=5 \quad \rightarrow \boxed{B_2(5,2,-3)}$$

תשובה: $B_1(7,-6,-1)$ **,** $B_2(5,2,-3)$**.**

(2) קדקוד C **נמצא על הישר** B_1B_2**, כי** $\angle ACB_1 = \angle ACB_2 = 90°$ **(הוא נקודת האמצע של הקטע** B_1B_2**).**

ב. גובה פירמידה הוא המרחק בין המישורים המקבילים: $h=\frac{\left|-15+6\right|}{\sqrt{2^2+1+2^2}}=\frac{9}{\sqrt{9}}=3$

שטח משולש $\Delta ACB_1=\frac{\sqrt{18}\sqrt{18}}{2}=9$ **, ולכן** $S_{\Delta AB_1B_2}=9\cdot 2=18$ **ונפח הפירמידה** $V=\frac{18\cdot 3}{3}=18$

תשובה: נפח הפירמידה 18 **יחידות נפח.**

א. (1) נתון: $\frac{|z^2-i|}{|z^2+3i|}=1$ **, כאשר** $z=x+yi$

$$\frac{|(x+yi)^2-i|}{|(x+yi)^2+3i|}=1$$
$$|(x+yi)^2-i|=|(x+yi)^2+3i|$$
$$|x^2+2xyi-y^2-i|=|x^2+2xyi-y^2+3i|$$
$$|x^2-y^2+(2xy-1)i|=|x^2-y^2+(2xy+3)i|$$
$$\sqrt{(x^2-y^2)^2+(2xy-1)^2}=\sqrt{(x^2-y^2)^2+(2xy+3)^2}$$
$$(2xy-1)^2=(2xy+3)^2$$
$$*2xy-1=2xy+3 \quad \to -1=3 \quad \to \varnothing$$
$$*2xy-1=-2xy-3 \quad \to 4xy=-2 \quad \to \boxed{xy=-0.5}$$

תשובה: $xy=-0.5$

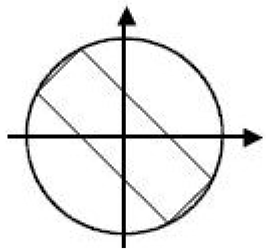
(2) כיוון שמכפלת שיעורי הנקודות שלילית, הרי שהמקום הגיאומטרי נמצא ברביע השני והרביעי.

ב. (1) נתון: $|z|^2=1.25$ **, כאשר** $z=x+yi$ **נמצא על** $xy=-0.5$

$$|(x+yi)|^2=1.25$$
$$(\sqrt{x^2+y^2})^2=1.25$$
$$x^2+y^2=1.25$$
$$x^2+(-\frac{0.5}{x})^2=1.25$$
$$x^2+\frac{0.25}{x^2}=1.25$$
$$x^4-1.25x^2+0.25=0$$
$$(x^2)_{1,2}=\frac{1.25\pm0.75}{2}$$
$$x^2=1 \quad \to x=\pm1 \quad \to \boxed{(1,-0.5)},\boxed{(-1,0.5)}$$
$$x^2=0.25 \quad \to x=\pm0.5 \quad \to \boxed{(0.5,-1)},\boxed{(-0.5,1)}$$

תשובה: $(1,-0.5)$ **,** $(-1,0.5)$ **,** $(0.5,-1)$ **,** $(-0.5,1)$

(2) כיוון שכל הנקודות נמצאות על המעגל $x^2+y^2=1.25$



כאשר אמצע הקטע שבין $(1,-0.5)$ **ו-** $(-1,0.5)$ **הוא ראשית הצירים.**

וגם אמצע הקטע שבין $(0.5,-1)$ **ו-** $(-0.5,1)$ **הוא ראשית הצירים,**

הרי שכל קטע כזה הוא קוטר במעגל ,ומכאן שכל הזויות ישרות,

והמרובע הוא מלבן.

נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{e^x-ae^{-x}}{e^x+ae^{-x}}$

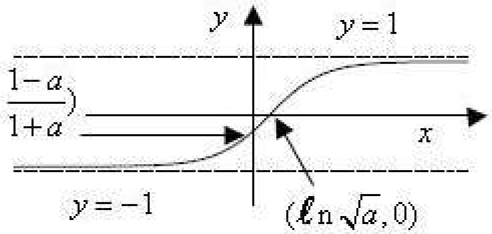
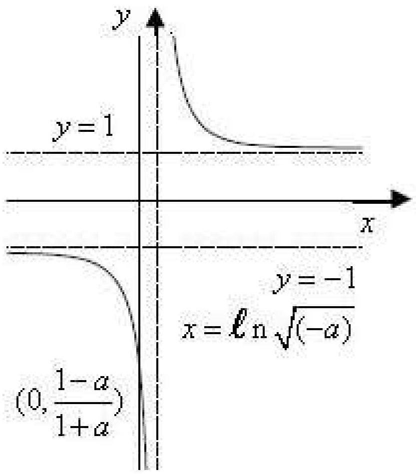
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-ae^{-x}}{e^x+ae^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{+\infty}-0}{e^{+\infty}+0}=1 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-ae^{-x}}{e^x+ae^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{0-ae^{+\infty}}{0+ae^{+\infty}}=-1$$

$$f'(x)=\frac{(e^x+ae^{-x})(e^x+ae^{-x})-(e^x-ae^{-x})(e^x-ae^{-x})}{(e^x+ae^{-x})^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^xe^x+a+a+a^2e^{-2x}-e^xe^x+a+a-a^2e^{-2x}}{(e^x+ae^{-x})^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{4a}{(e^x+ae^{-x})^2}}$$

		$a>0$	$a<0$
א	(1)	e^x+ae^{-x} **חיובי לכל** x **ולכן הפונקציה מוגדרת לכל** x **האסימפטוטות אופקיות** $y=1,\quad y=-1$	$e^x\neq -ae^{-x}\to e^{2x}\neq -a$ $2x\neq \ell n(-a)\to x\neq \frac{1}{2}\ell n(-a)$ $\boxed{x\neq \ell n\sqrt{(-a)}}$ **האסימפטוטות אופקיות** $y=1,\quad y=-1$ **אסימפטוטה אנכית** $x=\ell n\sqrt{(-a)}$ **(מאפס מונה ולא מכנה)**
	(2)	$4a$ **חיובי לכל** x **(מכנה הנגזרת חיובי)** **ולכן הפונקציה עולה לכל** x	$4a$ **שלילי לכל** x**, ולכן הפונקציה יורדת עבור** $x<\ell n\sqrt{(-a)}$ **או** $x>\ell n\sqrt{(-a)}$
	(3)	$f(0)=\frac{e^0-ae^{-0}}{e^0+ae^{-0}}\to(0,\frac{1-a}{1+a})$ $0=e^x-ae^{-x}\to ae^{-x}=e^x\to$ $e^{2x}=a\to x=\ell n\sqrt{a}\to\boxed{(\ell n\sqrt{a},0)}$	$(0,\frac{1-a}{1+a})$

<table>
<tr>
<td>ב.</td>
<td></td>
<td></td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

א. (1) נתונה $f(x)=\ell og_3(x^2-6x+18)$ **בתחום** $0\le x\le \frac{5\pi}{3}$

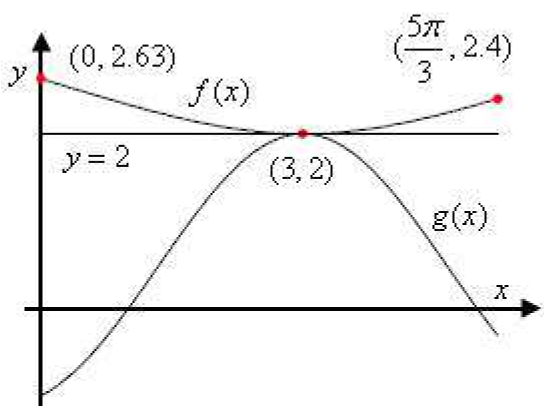
נקודות קצה: $f(0)=\ell og_3(18) \quad \to (0, 2.63), \quad f(\frac{5\pi}{3})=\ell og_3(((\frac{5\pi}{3})^2-6(\frac{5\pi}{3})+18) \quad \to (\frac{5\pi}{3}, 2.4)$

נקודות בהן הנגזרת מתאפסת:

$$f'(x)=\frac{2x-6}{(x^2-6x+18)\cdot \ell n 3} \quad \to 2x-6=0 \quad \to x=3$$
$$f(3)=\ell og_3(3^2-6\cdot 3+18)=\ell og_3 9 \quad \to (3, 2)$$

וניתן לראות את התשובה בהתאם לערכי ה- y **בתחום הנתון.**

תשובה: מינימום מוחלט $(3, 2)$**, מקסימום מוחלט** $(0, 2.63)$



(2) נתון כי נתון כי הישר $y=k$ **משיק לגרף של** $f(x)$

ולגרף של $g(x)$ **באותה נקודה, כאשר** $g'(x)=0$

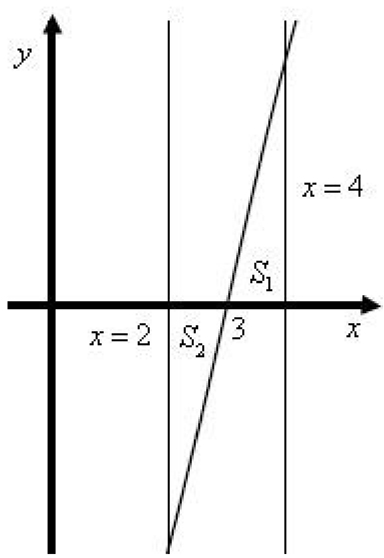
פעם אחת בלבד – כלומר נקודת ההשקה היא $(3, 2)$.

(3) פתרון המשוואה, $f(x)=g(x)$ **על פי הגרף הוא** $x=3$.

ב. (1) $f'(x)>0$ **כאשר** $f(x)$ **עולה, כלומר בתחום** $3<x<\frac{5\pi}{3}$

$f'(x)<0$ **כאשר** $f(x)$ **יורדת, כלומר בתחום** $0<x<3$

(2) נצייר סקיצה של גרף הנגזרת על פי סעיף ב (1)



$$S_1=\int_3^4 (f'(x)-0)\,dx = f(x)\Big]_3^4=$$
$$=\ell og_3(4^2-6\cdot 4+18)-\ell og_3(3^2-6\cdot 3+18)=$$
$$=\ell og_3(10)-\ell og_3(9)=0.096$$
$$S_2=\int_2^3 (0-f'(x))\,dx=-f(x)\Big]_2^3=$$
$$=-\ell og_3(3^2-6\cdot 3+18)+\ell og_3(2^2-6\cdot 2+18)=$$
$$=-\ell og_3(9)-\ell og_3(10)=0.096$$
$$S=S_1+S_2=0.096+0.096=\boxed{0.192}$$

תשובה: גודל השטח 0.192 **יח"ר**