א. נתונה המשוואה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-16}=1$ **,** $a\neq 4$ **,** $a>0$ **.**

(1) משוואת אליפסה קנונית היא מהצורה : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **, כאשר** $a,b>0$ **.**

(אם $a>b$ **אז** $2a$ **הוא הציר הארוך, אך בשאלה הנתונה אין הגבלה)**

משוואת האליפסה הנתונה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16-a^2}=1$

נדרוש $16-a^2>0$ **ומתקבלת פרבולה בעלת מקסימום,**

ששורשיה הם ± 4 **ובהתאם עבור** $-4<a<4$

אם $16-a^2=a^2$ **ומכאן ש-** $a>0 \leftarrow$ $16=2a^2 \quad \rightarrow a^2=8 \quad \rightarrow a=2\sqrt{2}$

ונקבל מעגל, שהוא מקרה פרטי של אליפסה עבור $a=2\sqrt{2}$ **,**

בחיתוך עם התנאי $a,b>0$ **נקבל ש:** $0<a<4$

תשובה: $0<a<4, \quad a\neq 2\sqrt{2}$ **.**

אם נכיר בכך שמעגל קנוני הוא מקרה פרטי של אליפסה קנונית,

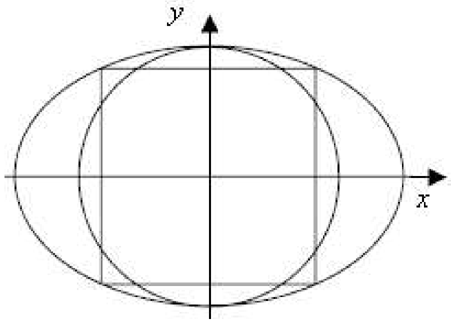
אז תיתכן גם התשובה: $0<a<4$

(2) משוואת מעגל היא מהצורה $(x-m)^2+(y-n)^2=R^2$

במקרה זה משוואת המעגל, עפ"י א (1) היא $x^2+y^2=8$

תשובה: $a=2\sqrt{2}$

ב. ידוע כי המשוואה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16-a^2}=1$ **מייצגת אליפסה, לכן** $0<a^2<16, \quad a^2\neq 8$



כאשר על פי הציור האליפסה אינה מעגל לכן $0<a^2<16, \quad a^2\neq 8$

שיעור נקודת החיתוך עם ציר ה- y **הם:** $(0,\sqrt{16-a^2}), \quad (0,-\sqrt{16-a^2})$

ולכן רדיוס המעגל הוא $\sqrt{16-a^2}$ **ושטחו:** $\pi(16-a^2)$ **.**

צלעות הריבוע מקבילות לצירים, ושיעורי קדקודי הריבוע, בהתאם,
שווים בערכן המוחלט ולכן:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{16-a^2}=1 \quad \to x^2=\frac{a^2(16-a^2)}{16}$$

אורך צלע הריבוע $2\sqrt{\frac{a^2(16-a^2)}{16}}$ **ושטחו בהתאם** $\frac{a^2(16-a^2)}{4}$

נציב ביחס הנתון: $\frac{4\pi}{9}=\frac{\pi(16-a^2)}{\frac{a^2(16-a^2)}{4}}$ **ונקבל ש:** $a^2=9$

תשובה: $a^2=9$

א. נמצא את משוואת מישור הפירמידה, שהצגתו הפרמטרית היא $\pi: \quad \underline{x}=(2,-1,4)+t(4,-3,5)+s(2,-1,1)$

$$\left.\begin{array}{ll}(a,b,c)\,(4,-3,5)=0 & \to 4a-3b+5c=0\\ (a,b,c)\,(2,-1,1)=0 & \to 2a-b+c=0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}4a-3b+5c=0\\ -4a+2b-2c=0\end{array}\right\}-b+3c=0 \quad \to b=3c$$

נסמן $c=1$ **ומכאן ש:** $b=3$ **ולכן:** $2a-3+1=0 \quad \to a=1$ **ומשוואת המישור:** $x+3y+z+d=0$

נציב את שיעורי הקדקוד $\mathrm{B}(4,-2,5)$ $\quad 4-6+5+d=0 \to d=-3$

ומשוואת מישור הבסיס ABCD **היא** $\pi: x+3y+z-3=0$

נמצא את ערך הפרמטר בקדקוד $\mathrm{A}(6,a,9)$**, על ידי הצבתו במשוואת המישור:**

$6+3a+9-3=0 \quad \to a=-4$ **ושיעורי הקדקוד** $\mathrm{A}(6,-4,9)$

נמצא את שטח בסיס הפירמידה, ששלושה מקדקודיה $\mathrm{A}(6,-4,9)$ **,** $\mathrm{B}(4,-2,5)$ **,** $\mathrm{C}(-2,2,-1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\underline{\mathrm{C}}-\underline{\mathrm{A}}=\underline{x}=(-8,6,-10)\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\underline{\mathrm{B}}-\underline{\mathrm{A}}=\underline{x}=(-2,2,-4)$$

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{(-8,6,-10)\,(-2,2,-4)}{|(-8,6,-10)|\,|(-2,2,-4)|}$$

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{|16+12+40|}{\sqrt{64+36+100}\sqrt{4+4+16}}=\frac{68}{\sqrt{200}\sqrt{24}}$$

$$\angle\mathrm{BAC}=11.039^\circ$$

שטח הבסיס 13.266 **יח"ר** $= S_{\mathrm{ABCD}}=\sqrt{200}\sqrt{24}\sin 11.039^\circ$ **.**

אורך הגובה הוא מרחק הקדקוד $\mathrm{S}(1,1,8)$ **ממישור הבסיס** $\pi: x+3y+z-3=0$

הוא: 2.7136 **יחידות**$= h=\dfrac{|1+3+8-3|}{\sqrt{1+9+1}}$ **ונפח הפירמידה** $12 = V=\dfrac{13.266\cdot 2.7136}{3}$

תשובה: נפח הפירמידה 12 **יחידות נפח.**

ב. המישור π **חותך את הצירים בנקודות** K **,** L **,** M

נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים, על ידי הצבת 0 **בהתאם לציר הנבחר:**

ציר x **:** $(3,0,0)$ **, ציר** y **:** $(0,1,0)$**, ציר** z **:** $(0,0,3)$**.**

כיוון שהצירים מאונכים זה לזה, הרי שנפח הפירמידה: 1.5 **יחידות נפח**$= V=\dfrac{(0.5\cdot 3\cdot 1)\cdot 3}{3}$

והיחס בין נפח הפירמידה SABCD **לבין נפח הפירמידה** OKLM **הוא** $12:1.5=8$**.**

תשובה : 8**.**

ג. הצגה פרמטרית של גובה הפירמידה SABCD **היא** $h = \underline{x} = (1,1,8) + p(1,3,1)$

ישר זה לא מקביל לאף אחד מהצירים ולכן חותך את שלוש פאות הפירמידה OKLM **,**

המונחות על המישורים: $[x,y],[x,z],[y,z]$**.**

הפאה הרביעית היא המישור π **עצמו אשר גובה הפירמידה** SABCD **מאונך לו ולכן חותך אותו.**

תשובה: הישר שעליו נמצא גובה הפירמידה SABCD **<u>חותך</u> את כל מישורי הפירמידה** OKLM **.**

א. נתונה המשוואה הריבועית $2z^2-(m-2)z-\frac{1}{8}i=0$ **.**

נשתמש בנוסחאות ויאטה:

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=-4 \quad \rightarrow \frac{z_2+z_1}{z_1z_2}=-4 \quad \rightarrow \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-4$$

$$b=4c$$

$$-(m-2)=4\cdot -\frac{1}{8}i \quad \rightarrow m-2=\frac{1}{2}i \quad \rightarrow \boxed{m=2+\frac{1}{2}i}$$

תשובה: $m=2+\frac{1}{2}i$

(נשים לב ש- 0 **אינו פתרון של המשוואה ובהתאם המשוואה** $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=-4$ **מוגדרת היטב)**

ב. (1) כיוון שהמשוואה ריבועית, פתרון יחיד מתקבל כאשר $\Delta=0$

$$(-(m-2))^2-4\cdot 2\cdot(-\frac{1}{8}i)=0 \quad \rightarrow m^2-4m+4+i=0$$

$$\Delta_\Delta=16-4(4+i)$$

$$\boxed{\Delta_\Delta=-4i} \quad \rightarrow \boxed{\Delta_\Delta=4cis\ 270°}$$

$$t_k=\sqrt{4}\ cis\frac{270°+360°k}{2}$$

$$t_0=2\ cis\ 135°=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i \quad ,t_1=2\ cis\ 315°=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$$

$$m_{1,2}=\frac{4\pm(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{2}$$

$$m_1=2+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \rightarrow m_2=2-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

תשובה: $2+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ **,** $2-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

(2) הפתרון היחיד מתקבל בנקודת הקדקוד: $z_K=-\frac{b}{2a}=\frac{m-2}{4}$

בהתאם לפתרון סעיף ב (1) נקבל: $z_1=\frac{1}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)$ **ו-** $z_2=\frac{1}{4}(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)$

שני הפתרונות נמצאים על הישר $y=-x$ **העובר בראשית הצירים.**

(3) אורך כל רדיוס מראשית הצירים לפתרונות המשוואה הוא $\frac{1}{4}\cdot\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{1}{4}$

ולכן נמצאים על המעגל הקנוני $x^2+y^2=\frac{1}{16}$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^2-2x-a}{e^{-x}}$ **, שהמכנה שלה חיובי לכל** x **.**

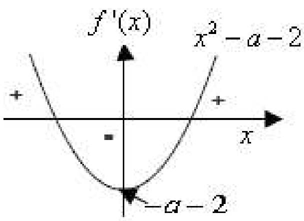
תשובה: כל x **.**

ב. נמצא את תחומי העלייה והירידה:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)e^{-x}+(x^2-2x-a)e^{-x}}{e^{-2x}}$$

$$f'(x)=\frac{e^{-x}(2x-2+x^2-2x-a)}{e^{-2x}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2-a-2}{e^{-x}}}$$



המכנה חיובי לכל x **ולכן סימן נגזרת נקבע על ידי הטרינום הריבועי** x^2-a-2 **.**

כאשר $-a-2<0 \quad \to a>-2$ **נקבל פרבולה בעלת מינימום החותכת את ציר ה-** x **פעמיים,**

ובכל אחת מהפעמים תהיה נקודת קיצון של $f(x)$ **(משמאל לימין: מקסימום, מינימום)**

תשובה: $a>-2$

ג. שיעורי ה- x **של נקודות הקיצון הם** $\pm\sqrt{a+2}$ **ולכן המרחק בין הישרים הוא** $2\sqrt{a+2}$

$$2\sqrt{a+2}=6 \quad \to \sqrt{a+2}=3 \quad \to a+2=9$$

$$\boxed{a=7} \quad \sqrt{7+2}=3 \quad \to 3=3\ o.k.$$

תשובה: $a=7$

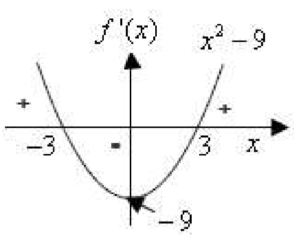
נציב $a=7$ **ונקבל:** $\boxed{f(x)=\dfrac{x^2-2x-7}{e^{-x}}}$

ד. נמצא את תחומי העלייה והירידה:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)e^{-x}+(x^2-2x-7)e^{-x}}{e^{-2x}}$$

$$f'(x)=\frac{e^{-x}(2x-2+x^2-2x-7)}{e^{-2x}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2-9}{e^{-x}}}$$



הנגזרת מתאפסת עבור $x=\pm3$ **, כאשר עבור** $x=-3$ **הפונקציה עוברת מעלייה לירידה ולכן מקסימום, ועבור** $x=3$ **מירידה לעלייה ולכן מינימום.**

תשובה: $x=-3$ **מקסימום,** $x=3$ **מינימום.**

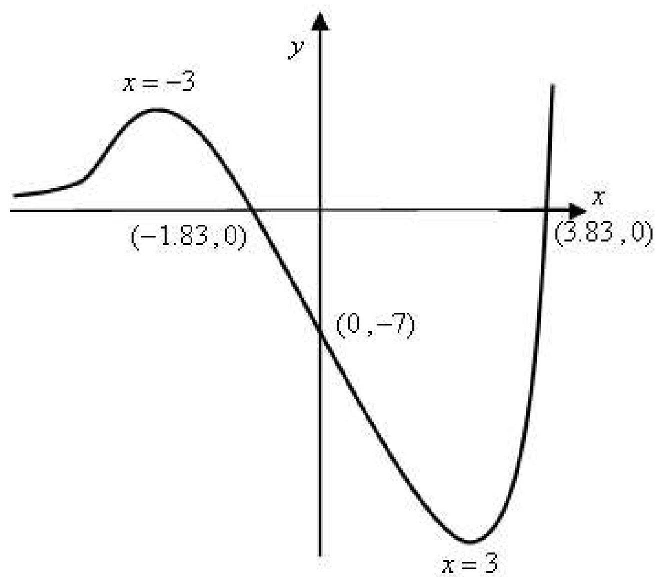
ה. בנקודות החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y=0$

$$x^2-2x-7=0$$
$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{32}}{2}$$
$$x_1=3.83 \quad \rightarrow \boxed{(3.83\,,0)}$$
$$x_2=-1.83 \quad \rightarrow \boxed{(-1.83\,,0)}$$

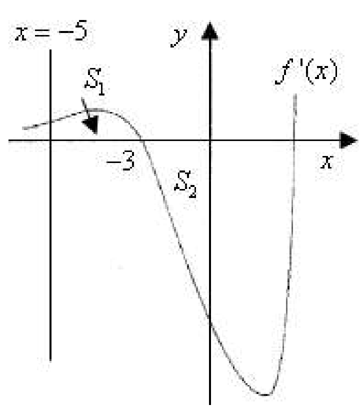
בנקודות החיתוך עם ציר ה- y מתקיים $x=0$ ובהתאם: $f(0)=\frac{0^2-2\cdot0-7}{e^{-0}}=-7 \quad \rightarrow \boxed{(0\,,-7)}$

תשובה: $(3.83\,,0)$ **,** $(-1.83\,,0)$ **,** $(0\,,-7)$

ו. סקיצה של גרף הפונקציה (נשים לב ש- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ **ובהתאם** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית)**



ז. נחשב את השטח המבוקש – שהוא חיבור של שני שטחים.



$$S_1=\int_{-5}^{-3}(f'(x)-0\,)dx$$
$$S_1=f(x)\Big]_{-5}^{-3}$$
$$S_1=f(-3)-f(-5)$$
$$S_1=0.398-(\frac{(-5)^2-2\cdot(-5)-7}{e^5})$$
$$S_1=0.398-0.189$$
$$\boxed{S_1=0.209}$$

$$S_2=\int_{-3}^{0}(0-f'(x)\,)dx$$
$$S_2=-f(x)\Big]_{-3}^{0}$$
$$S_2=-f(0)+f(-3)$$
$$S_2=7+(\frac{(-3)^2-2\cdot(-3)-7}{e^3})$$
$$S_2=7+0.398$$
$$\boxed{S_2=7.398}$$

והשטח כולו: 7.607 **יח"ר** $=0.209+7.398$

תשובה: 7.607 **יח"ר.**

נתונה הפונקציה $f(x)=\ell og_b(ax)$ **בתחום** $1\le x\le 2$ **,** $a>0$ **,** $0<b<1$ **.**

בתחום הנתון הערך הגדול ביותר של הפונקציה הוא 4 **,**

והערך הקטן ביותר של הפונקציה הוא 2.

$a>0$ **ולכן תחום ההגדרה של הפונקציה הוא** $x>0$ **, ולכן בתחום הנתון ,** $1\le x\le 2$**, הפונקציה רציפה.**

כיוון $0<b<1$ **הרי שהפונקציה יורדת, לכל** $x>0$ **ובפרט בתחום** $1<x<2$**.**

(ניתן לראות זאת גם על ידי נגזרת הפונקציה $f'(x)=\frac{a}{ax\ell n\, b}=\frac{1}{x\ell n\, b}<0$ **)**

לכן ערכי הקיצון הם בקצוות התחום: $f(1)=4$, $f(2)=2$.

$$\begin{cases}4=\ell og_b(a\cdot 1)\\ 2=\ell og_b(a\cdot 2)\end{cases}$$

$$(a>0):\begin{cases}b^4=a\\ b^2=2a\end{cases}$$

$$b^2=\frac{1}{2}\quad\rightarrow\boxed{a=\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{b=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

תשובה: $a=\frac{1}{4}$ **,** $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$

5ב

נתונה הפונקציה $f(x)=\ell og_a(\tan x)+\ell og_a(\frac{3x-x^2}{\tan x})$ **בתחום** $0<x<\frac{\pi}{2}$ **,** $0<a<1$ **.**

בתחום הנתון, $0<x<\frac{\pi}{2}$ **, מוגדרת פונקציית ה-** $\tan$ **וחיובית ולכן הביטוי** $\ell og_a(\tan x)$ **מוגדר בתחום.**

בתחום הנתון, $0<x<\frac{\pi}{2}$ **, הביטוי** $3x-x^2$ **חיובי (חיובי בתחום** $0<x<3$ **)**

וגם הביטוי $\tan x$ **חיובי ולכן המנה חיובית והביטוי** $\ell og_a(\frac{3x-x^2}{\tan x})$ **מוגדר.**

לכן הפונקציה רציפה בתחום $0<x<\frac{\pi}{2}$ **.**

בהתאם נפשט את הפונקציה לפני הגזירה:

$$f(x)=\ell og_a(\tan x)+\ell og_a(\frac{3x-x^2}{\tan x})=\ell og_a(\tan x)+\ell og_a(3x-x^2)-\ell og_a(\tan x)$$
$$f(x)=\ell og_a(3x-x^2)$$

נמצא את נקודות הקיצון :

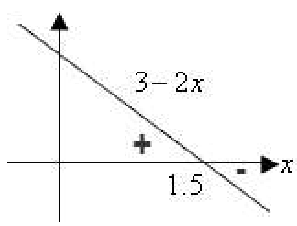
$$\boxed{f'(x)=\frac{3-2x}{(3x-x^2)\ell\text{n}\,a}}$$

הנגזרת מתאפסת רק עבור $x=1.5 \quad \rightarrow \quad 3-2x=0$ **.**

$0<a<1$ **ולכן** $\ell\text{n}\,a<0$

בהתאם: הפונקציה יורדת בתחום $0<x<1.5$

ועולה בתחום $1.5<x<\frac{\pi}{2}=1.571$



תשובה: $x=1.5$ **מינימום.**

<u>ניתן לגזור גם את "הפונקציה המקורית"</u>

$$f'(x) = \frac{1}{\tan x \cos^2 x \ell\text{n}\, a} + \frac{1}{\frac{3x-x^2}{\tan x}\ell\text{n}\, a} \cdot \frac{(3-2x)\tan x - \frac{3x-x^2}{\cos^2 x}}{\tan^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ell\text{n}\, a} \cdot \left(\frac{1}{\tan x \cos^2 x} + \frac{(3-2x)\sin x \cos x - 3x + x^2}{(3x-x^2)\tan x \ \cos^2 x}\right.$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ell\text{n}\, a} \cdot \frac{3x-x^2+(3-2x)\sin x \cos x - 3x + x^2}{(3x-x^2)\tan x \ \cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ell\text{n}\, a} \cdot \frac{(3-2x)\sin x \cos x}{(3x-x^2)\tan x \ \cos^2 x}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{3-2x}{(3x-x^2)\ell\text{n}\, a}}$$