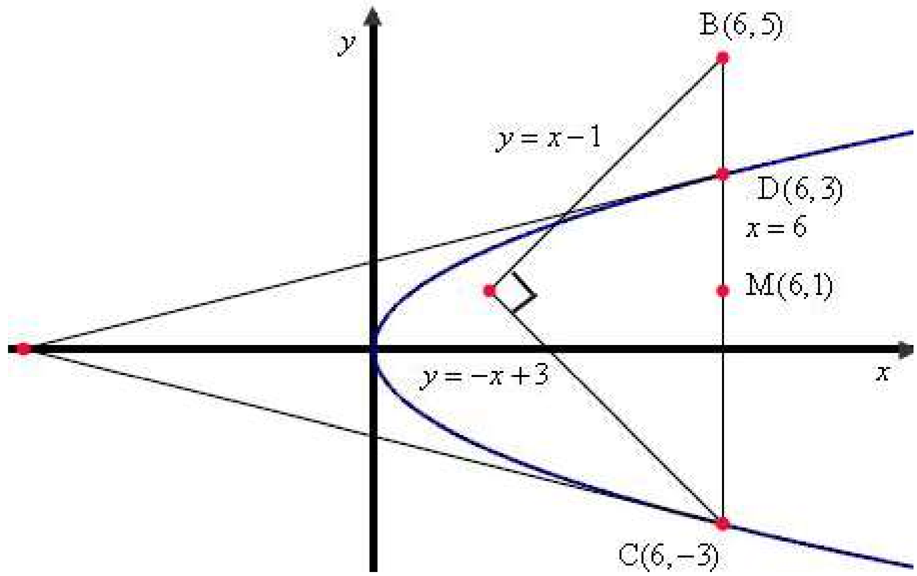
א. משוואת הצלע AB **היא** $y=x-1$ **ומשוואת הצלע** AC **היא** $y=-x+3$ **.**

מכפלת השיפועים היא -1 $m_{AB}=1, m_{AC}=-1$ **, ולכן המשולש הוא ישר זווית, כאשר** $\measuredangle A=90^\circ$ **.**

מרכז המעגל החוסם, הוא באמצע היתר: BC **, בהתאם למשפט: זווית היקפית ישרה במעגל נשענת על קוטר.**



נתון כי $D(6,3)$ **נמצאת על הצלע** BC **כך ש:** $\frac{BD}{DC}=\frac{1}{3}$ **, ובהתאם נשתמש בנוסחה של חלוקת קטע ביחס נתון.**

נסמן את שיעורי הקדקוד $B(x,x-1)$ **, בהתאם למשוואת הצלע** AB **,** $y=x-1$ **.**

$$\begin{cases} 6=\dfrac{3x+x_C}{4} \rightarrow x_C=24-3x \\ 3=\dfrac{3(x-1)+y_C}{4} \rightarrow y_C=15-3x \end{cases}$$

נציב את שיעורי הקדקוד $C(24-3x,15-3x)$ **, במשוואת הצלע** AC **היא** $y=-x+3$ **.**

$$15-3x=-(24-3x)+3 \quad \rightarrow -6x=-36 \quad \rightarrow x=6$$

משוואת היתר היא $x=6$ **, כי** $x_B=x_D=6$ **.**

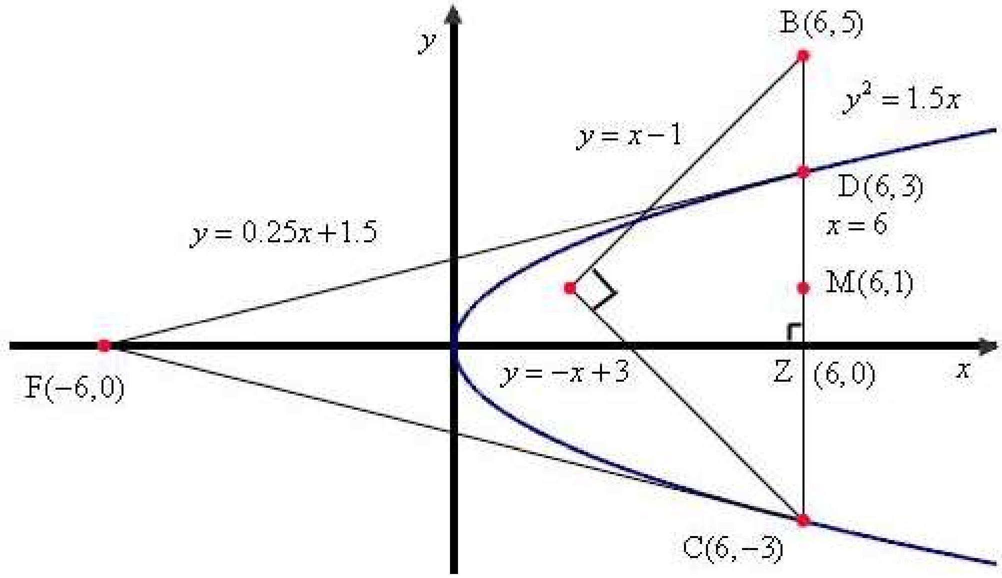
בהתאם נקבל $B(6,5)$ **,** $C(6,-3)$ **.**

ושיעורי נקודת אמצע היתר: $M(6,1)\left\{\begin{array}{l} x_M=6 \\ y_M=\dfrac{5+(-3)}{2}=1 \end{array}\right\}$ **, ומכאן שהרדיוס** $R=5-1=4$ **.**

תשובה: משוואת המעגל החוסם את ΔABC **היא** $(x-6)^2+(y-1)^2=16$

ב. הנקודה $D(6,3)$ **נמצאת על הפרבולה** $y^2 = 2px$ **.**

נציב את שיעורי הנקודה במשוואת הפרבולה: $3^2 = 2p \cdot 6 \rightarrow p = 0.75 \rightarrow y^2 = 1.5x$



נתון כי המשיק (DF) **לפרבולה בנקודה** $D(6,3)$**, נפגש עם ישר העובר ב-** $C(6,-3)$**, כך ש-** $FD = FC$ **.**

עקב הסימטריה של הפרבולה לציר ה- x**, והעובדה שהישר** $CD: x = 6$ **מאונך לציר ה-** x**,**

הרי שגם הישר FC **יהיה משיק לפרבולה ונקודת החיתוך תהייה על ציר ה-** x **.**

נוסחת משוואת משיק לפרבולה: $yy_0 = p(x + x_0)$ **.**

נציב $D(6,3)$ **,** $p = 0.75$ **ונקבל** $3y = 0.75(x+6) \rightarrow y = 0.25x + 1.5$ **.**

עבור $y = 0$ **נקבל** $F(-6,0)$**, שיעורי נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-** x **.**

$$S_{\Delta FDC} = \frac{DC \cdot ZF}{2} = \frac{(3-(-3)) \cdot (6-(-6))}{2} = \frac{6 \cdot 12}{2} = 36$$

תשובה: שטח המשולש הוא 36 **יח"ר.**

שני המישורים מקבילים, כלומר וקטור המקדמים שלהם (הנורמל של המישורים, $\underline{n}:(a,b,c)$) שווה,

ובהתאם משוואותיהם: $\pi_1: ax+by+cz+d_1=0,\quad \pi_2: ax+by+cz+d_2=0$

נציב את שיעורי הנקודות הנתונות במשוואות המישורים.

$$\text{A}(2,0,3)\quad \pi_1: 2a+3c+d_1=0 \quad \to 2a+3c-6c=0 \quad \to a=1.5c$$
$$\text{B}(0,0,6)\quad \pi_1: 6c+d_1=0 \quad \to d_1=-6c \uparrow$$
$$\text{C}(-2,0,2)\quad \pi_2: -2a+2c+d_2=0 \quad \to -3c+2c+d_2=0 \quad \to d_2=c$$
$$\pi_1: 1.5cx+by+cz-6c=0$$
$$\pi_2: 1.5cx+by+cz+c=0$$

המרחק בין שני המישורים המקבילים הוא 2, ובהתאם נשתמש בנוסחה למרחק בין מישורים מקבילים:

$$2=\frac{|-6c-c|}{\sqrt{(1.5c)^2+b^2+c^2}}$$
$$2=\frac{|-7c|}{\sqrt{3.25c^2+b^2}}$$
$$13c^2+4b^2=49c^2 \quad \to b=\pm 3c$$

לפני ההעלאה הריבוע, כל הביטויים חיוביים, ולכן אין צורך בבדיקה.

אפשרות ראשונה:

$$b=3c \quad \to c=2,\quad b=6,\quad a=3,\quad d_1=-12,\quad d_2=2$$
$$\pi_1=3x+6y+2z-12=0,\quad \pi_2=3x+6y+2z+2=0$$

אפשרות שנייה:

$$b=-3c \quad \to c=2,\quad b=-6,\quad a=3,\quad d_1=-12,\quad d_2=2$$
$$\pi_1=3x-6y+2z-12=0,\quad \pi_2=3x-6y+2z+2=0$$

תשובה: $\pi_1=3x+6y+2z-12=0,\quad \pi_2=3x+6y+2z+2=0$

או: $\pi_1=3x-6y+2z-12=0,\quad \pi_2=3x-6y+2z+2=0$

נתונה המשוואה $z^3 = w$ **, אשר אחד מפתרונותיה הוא** $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **.**

נעבור להצגה טריגונומטרית:

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}$$

$$\theta = -60° + 180°k$$

$$\theta = 120° \quad \leftarrow 2nd\ quadrant$$

$$R = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2} = 1$$

$$z = cis\,120°$$

ובהתאם על פי משפט דה-מואבר $w = z^3 = 1^3 cis(120° \cdot 3) = cis\,360°$ **.**

שלושת הפתרונות, על פי נוסחת השורשים של מספרים מרוכבים:

$$z_k = cis\,(\frac{360°}{3} + \frac{360°K}{3})$$

$$k = 0: \quad z_0 = cis\,120°$$

$$k = 1: \quad z_1 = cis\,240°$$

$$k = 2: \quad z_2 = cis\,360°$$

וגם ניתן היה ישירות לקבל את הפתרונות, שבמקרה של $(cis\,\theta)^n = w$ **,**

מהווים סדרה הנדסית שמנתה $\frac{360°k}{n}$ **(במקרה הפרטי** $120°k$**).**

נבדוק את הטענה המתבקשת:

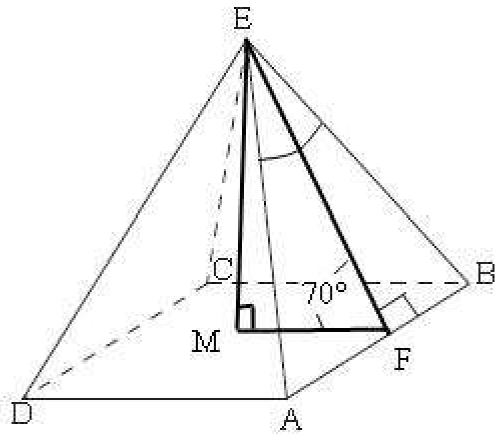
$$z_0 \cdot z_1 = cis\,120° \cdot cis\,240° = cis\,360° = z_2$$

$$z_0 \cdot z_2 = cis\,120° \cdot cis\,360° = cis\,480° = cis\,120° = z_0$$

$$z_1 \cdot z_2 = cis\,240° \cdot cis\,360° = cis\,600° = cis\,240° = z_1$$

תשובה: הוּכַח.

(1) פאות הפירמידה הן משולשים שווי שוקיים חופפים, כי הבסיס הוא ריבוע,
והמקצועות הצדדיים שווים זה לזה בפירמידה ישרה.
הזווית שבין הפאה הצדדית (ΔSAB) לבסיס הפירמידה $ABCD$
היא הזווית בין שני האנכים (הגבהים) לישר החיתוך (מקצוע הבסיס AB).
נוריד גובה EF מהפאה למקצוע הבסיס, ולכן הוא גם תיכון וחוצה זווית הראש.
MF הוא אנך מהבסיס, כי הוא קטע אמצעים ב- ΔDAB,
ולכן גם מקביל לצלע AD ובהתאם מאונך ל- AB.
הזווית בין הפאה למישור הבסיס היא $\sphericalangle EFM = 70°$.
נסמן ב- x את מקצוע הבסיס ובהתאם, $MF = 0.5x$.



$\underline{\Delta EMF}$

$$\cos\sphericalangle EFM = \frac{MF}{EF}$$

$$\cos 70° = \frac{MF}{EF}$$

$$EF = \frac{0.5x}{\cos 70°}$$

$$\boxed{EF = 1.4619x}$$

$\underline{\Delta EBF}$

$$\tan\sphericalangle BEF = \frac{BF}{EF}$$

$$\tan\sphericalangle BEF = \frac{0.5x}{1.4619x}$$

$$\sphericalangle BEF = 18.88°$$

$$\boxed{\sphericalangle BEA = 37.76°}$$

תשובה: גודל זווית הראש של הפאה הצדדית הוא $37.76°$.

(2) נתון כי נפח הפירמידה הוא 11 סמ"ק.

$\underline{\Delta EMF}$

$$\tan \sphericalangle EFM = \frac{EM}{MF}$$

$$\tan 70° = \frac{EM}{0.5x}$$

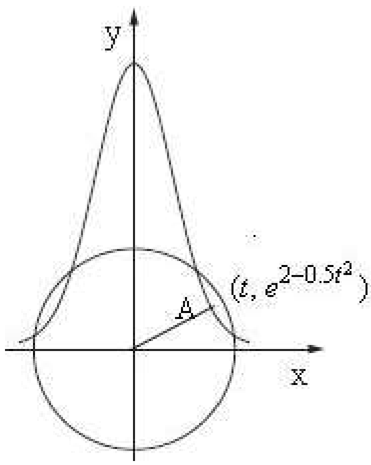
$$\boxed{EM = 1.3737x}$$

$$11 = \frac{x^2 \cdot 1.3737x}{3} \quad \rightarrow 33 = 1.3737x^3 \quad \rightarrow 24.022 = 1.3737x^3 \quad \rightarrow x = 2.885$$

תשובה: אורך צלע הבסיס של הפירמידה הוא 2.885 ס"מ.

נסמן $A(t, e^{2-0.5t^2})$ **נקודה על גרף הפונקציה** $f(x) = e^{2-0.5x^2}$ **.**

הפונקציה שיש להביא ***למינימום*** **היא** ***רדיוס המעגל הקנוני*** **, שמרכזו בראשית הצירים.**



$$R = \sqrt{(t-0)^2 + (e^{2-0.5t^2} - 0)^2}$$

$$\boxed{R = \sqrt{t^2 + e^{4-t^2}}}$$

$$\boxed{R' = \frac{2t - 2te^{4-t^2}}{2\sqrt{t^2 + e^{4-t^2}}}}$$

$$0 = \frac{2t - 2te^{4-t^2}}{2\sqrt{t^2 + e^{4-t^2}}}$$

$$0 = 2t - 2te^{4-t^2}$$

$$0 = 2t(1 - e^{4-t^2})$$

$$\boxed{t = 0} \quad \boxed{t = \pm 2}$$

$$R(3) = \sqrt{3^2 + e^{4-3^2}} = 3.001$$

$$R(2) = \sqrt{2^2 + e^{4-2^2}} = \sqrt{5}$$

$$R(0) = \sqrt{0^2 + e^{4-0^2}} = e^2$$

$$t = 2 \quad Min$$

כיוון שקל לראות שפונקצית הרדיוס רציפה וזוגית,

הרי שגם עבור $t = -2$ **נקבל רדיוס מינימלי, ובהתאם עבור** $t = 0$ **נקבל רדיוס מקסימלי.**

נשים לב, שבמקרה זה נקבל שהמעגל משיק לפונקציה (הן עבור $x = 2$ **והן עבור** $x = -2$ **),**

כי אם היה חותך את הפונקציה הרי שהיינו מקבלים שחלק מהעקום של הפונקציה נמצא בתוך המעגל,

והמרחק בין נקודות עליו למרכז המעגל היה קצר יותר וזו סתירה לכך שקבלנו מינימום.

תשובה: הרדיוס המינימלי הוא $\sqrt{5}$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=-\dfrac{a}{(a^2+1)(ax+1)}$ **, כאשר** a **הוא פרמטר בפונקציה זו.**

נתון כי הפונקציה $\mathrm{F}(a)$ **, בתחום** $a\ge 0$ **, מקיימת** $\mathrm{F}(a)=\int_0^a f(x)\,dx$

$$\mathrm{F}(a)=\int_0^a -\frac{a}{(a^2+1)(ax+1)}\,dx$$

$$\mathrm{F}(a)=-\frac{\cancel{a}\ell\mathrm{n}|ax+1|}{(a^2+1)\cancel{a}}\Big]_0^a$$

$$\mathrm{F}(a)=\left(-\frac{\ell\mathrm{n}|a^2+1|}{a^2+1}\right)-\left(-\frac{\ell\mathrm{n}|a\cdot 0+1|}{a^2+1}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{F}(a)=-\frac{\ell\mathrm{n}(a^2+1)}{a^2+1}} \quad \leftarrow a^2+1>0$$

תשובה: $\mathrm{F}(a)=-\dfrac{\ell\mathrm{n}(a^2+1)}{(a^2+1)}$

ב. (1) נמצא את נקודות הקיצון , בתחום $a\ge 0$ **.**

$$\mathrm{F}'(a)=-\frac{\frac{(a^2+1)\cdot 2a}{a^2+1}-2a\ell\mathrm{n}(a^2+1)}{(a^2+1)^2}\to \boxed{\mathrm{F}'(a)=\frac{2a(1-\ell\mathrm{n}(a^2+1))}{(a^2+1)^2}}$$

$$0=2a(1-\ell\mathrm{n}(a^2+1))$$

$$,\boxed{a=0}\quad end\ po\mathrm{int}$$

$$\ell\mathrm{n}(a^2+1)=1\quad\to a^2+1=e\quad\to a=\sqrt{e-1}\quad\leftarrow a\ge 0$$

$$\mathrm{F}(0)=-\frac{\ell\mathrm{n}(0^2+1)}{0^2+1}=0,\ \mathrm{F}(\sqrt{e-1})=-\frac{\ell\mathrm{n}(\sqrt{e-1}^2+1)}{\sqrt{e-1}^2+1}=-\frac{1}{e}=-0.368,\ \mathrm{F}(\sqrt{2e-1})=-0.311$$

סוג נקודות הקיצון נקבע על פי ערכי הפונקציה, לכן חושַב ערכה בנקודה שבה $x=\sqrt{2e-1}$ **.**

תשובה: $(0,0),Max$ **,** $(\sqrt{e-1},-\frac{1}{e}),Min$.

(2) מעבר לנקודה $(0,0)$ **, אין נקודות חיתוך נוספות עם הצירים, כי הפונקציה שלילית לכל** $a\ge 0$ **.**

הסבר: המקדם שלילי, המכנה חיובי, וערכי פונקציית ה- $\ell\mathrm{n}(a^2+1)$ **חיוביים כי הארגומנט גדול מ-** 1 **.**

תשובה: $(0,0)$ **.**

ג. הסקיצה המתאימה: