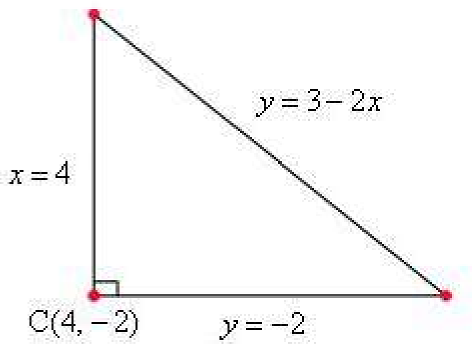
א. נתון כי משולש ABC **ישר זווית,** $\sphericalangle C = 90^\circ$ **,** $C(4,-2)$ **,** $x_A > x_B$ **, ומשוואת היתר היא** $y = 3-2x$ **.**



כמו כן, נתון כי ניצבי המשולש מקבילים לצירים.

נציב $x=4$ **במשוואת היתר ונקבל** $(4,-5)$ **.**

נציב $y=-2$ **,** $-2 = 3-2x \leftarrow 2x = 5$ **במשוואת היתר ונקבל** $(2.5,-2)$ **.**

כיוון ש $x_A > x_B$ **, הרי ש:** $A(4,-5)$ **ו-** $B(2.5,-2)$ **.**

תשובה: $A(4,-5)$ **ו-** $B(2.5,-2)$ **.**

ב. נתוני השאלה נשארים כפי שהם,

למעט העובדה שניצבי המשולש אינם מקבילים לצירים.

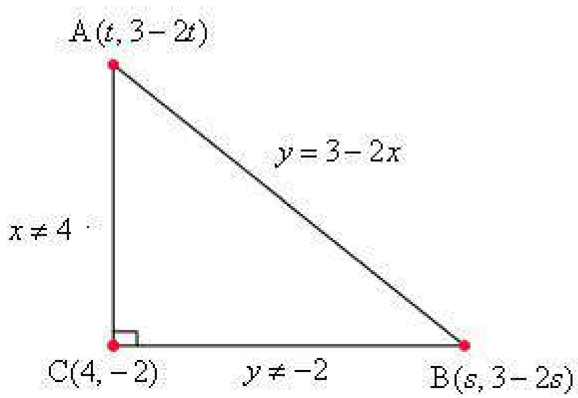
לכן, לא ייתכן מצב שלאחד מהניצבים אין שיפוע, כלומר $x \neq 4$ **(וכמובן** $y \neq -2$ **).**

נפתור בשתי דרכים: (1) משוואת מרחק ומכפלות שיפועים (2) מציאת מרכז מעגל חוסם.

<u>(1) משוואת מרחק ומכפלות שיפועים</u>

נסמן את שני קדקודי יתר המשולש: $A(t, 3-2t)$ **,** $B(s, 3-2s)$ **(** $t>s$ **).**

אורך היתר שווה לאורכו במשולש שצלעותיו מקבילות לצירים, שאת קדקודיו מצאנו בסעיף א.



$$(AB)^2 = (4-2.5)^2 + (-5-(-2))^2 = 11.25$$

$$(t-s)^2 + (3-2t-(3-2s))^2 = 11.25$$
$$(t-s)^2 + (2s-2t)^2 = 11.25$$
$$(t-s)^2 + 4(t-s)^2 = 11.25$$
$$5(t-s)^2 = 11.25$$
$$(t-s)^2 = 2.25$$
$$t-s = 1.5$$
$$\cancel{t-s=-1.5} \leftarrow t>s$$

ובהתאם, שני קדקודי יתר המשולש:

$A(t, 3-2t)$ **,** $B(t-1.5, 6-2t) \leftarrow B(t-1.5, 3-2(t-1.5))$ **(** $t>s$ **).**

על פי תנאי ניצבות מכפלת שיפועי הניצבים שווה ל- -1 **.**

$$m_{AC} \cdot m_{BC} = \frac{3-2t-(-2)}{t-4} \cdot \frac{6-2t-(-2)}{t-5.5} = \frac{5-2t}{\cancel{t-4}} \cdot \frac{\overset{-2}{\cancel{8-2t}}}{t-5.5} = -1 \quad / t \neq 4$$

$$-10+4t = -t+5.5$$
$$5t = 15.5$$
$$t = 3.1$$

נציב $t=3.1$ **, בביטויי קדקודי היתר, ונקבל:** $A(3.1,-3.2)$ **ו-** $B(1.6,-0.2)$ **.**

תשובה: $A(3.1,-3.2)$ **,** $B(1.6,-0.2)$ **.**

(2) מרכז מעגל חוסם, או התיכון ליתר שווה למחצית היתר

נסמן את מרכז המעגל החוסם, אמצע היתר, $M(t, 3-2t)$ **.**

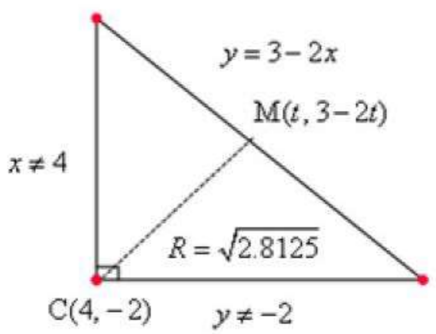
ע"פ נוסחת אמצע קטע, עבור המשולש שצלעותיו מקבילות לצירים: $x = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4+2.5}{2} = 3.25$ **,**

לכן, במקרה זה $t \neq 3.25$ **.**

המרחק בין $M(t, 3-2t)$ **לקדקוד** $C(4, -2)$ **שווה לרדיוס המעגל, כלומר לחצי מהקוטר (חצי מהיתר).**

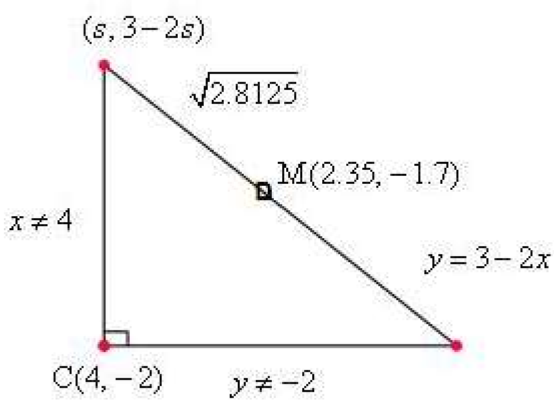
$(AB)^2 = (4-2.5)^2 + (-5-(-2))^2 = 11.25$ **,**

כלומר $(MC)^2 = (\frac{\sqrt{11.25}}{2})^2 = 2.8125$



$$(t-4)^2 + (3-2t-(-2)^2 = 2.8125$$
$$(t-4)^2 + (5-2t)^2 = 2.8125$$
$$5t^2 - 28t + 38.1875 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{-28 \pm 4.5}{10}$$
$$\cancel{t = 3.25} \quad \leftarrow t \neq 3.25$$
$$t = 2.35 \quad \rightarrow M(2.35, -1.7)$$

נציב במשוואת המרחק (או משוואת המעגל), כאשר קדקודי היתר יסומנו $(s, 3-2s)$ **.**



$$(s-2.35)^2 + (3-2s-(-1.7)^2 = 2.8125$$
$$(s-2.35)^2 + (4.7-2s)^2 = 2.8125$$
$$(s-2.35)^2 + 4(2.35-s)^2 = 2.8125$$
$$5(s-2.35)^2 = 2.8125$$
$$(s-2.35)^2 = 0.5625 \quad \rightarrow s - 2.35 = \pm 0.75$$
$$\left.\begin{matrix} S_1 = 3.1 \quad \rightarrow A(3.1, -3.2) \\ S_2 = 1.6 \quad \rightarrow B(1.6, -0.2) \end{matrix}\right\} \leftarrow x_A > x_B$$

תשובה: $A(3.1, -3.2)$ **,** $B(1.6, -0.2)$ **.**

.

א. נתון כי הפירמידה ישרה ובהתאם כל מקצועותיה שווים.

$\overrightarrow{SA}=\underline{u}$, $\overrightarrow{SB}=\underline{v}$, $\overrightarrow{SC}=\underline{w}$, **ולכן** $\underline{u}^2=\underline{v}^2=\underline{w}^2 \leftarrow |\underline{u}|=|\underline{v}|=|\underline{w}|$

כמו כן נתון כי $\underline{u}\underline{v}=\underline{u}\underline{w}=\underline{v}\underline{w}$ **.**

יש להראות כי הווקטור $\boxed{\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}}$ **מאונך למישור** ABC **,**

לכן נראה כי הוא יוצר זווית ישרה עם שני וקטורים במישור, שלא תלויים זה בזה.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB} \quad \rightarrow \boxed{\overrightarrow{AB}=-\underline{u}+\underline{v}}$$

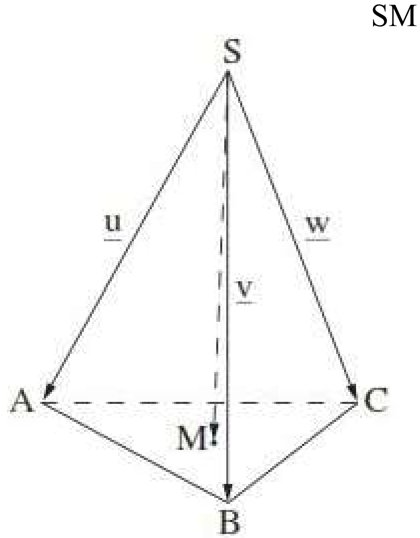
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SC} \quad \rightarrow \boxed{\overrightarrow{AC}=-\underline{u}+\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{3}\underline{u}^2+\cancel{\frac{1}{3}\underline{u}\underline{v}}-\cancel{\frac{1}{3}\underline{u}\underline{v}}+\frac{1}{3}\underline{v}^2-\frac{1}{3}\underline{u}\underline{w}+\frac{1}{3}\underline{v}\underline{w}=0 \quad \leftarrow \underline{u}\underline{w}=\underline{v}\underline{w},\ \underline{u}^2=\underline{v}^2$$

$$\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\underline{u}^2+\cancel{\frac{1}{3}\underline{u}\underline{w}}-\frac{1}{3}\underline{u}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{v}\underline{w}-\cancel{\frac{1}{3}\underline{u}\underline{w}}+\frac{1}{3}\underline{w}^2=0 \quad \leftarrow \underline{u}\underline{v}=\underline{v}\underline{w},\ \underline{u}^2=\underline{w}^2$$

תשובה: הוכַח.

ב. על פי סעיף א $\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}$ **הוא הנורמל של המישור** ABC **.**



נתון: $\underline{w}=(0,\sqrt{3},-2)$, $\underline{v}=(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-2)$, $\underline{u}=(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-2)$

$$\overrightarrow{SM}=\underline{\frac{1}{3}(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-2)}+\underline{\frac{1}{3}(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-2)}+\underline{\frac{1}{3}(0,\sqrt{3},-2)}$$

$$\overrightarrow{SM}=\underline{(0,0,-2)}$$

לכן, הנורמל למישור הוא $\underline{n}=(0,0,-2)$ **,**

או לשם הפשטות וקטור היחידה $\underline{n}=(0,0,1)$ **ומכאן שמשוואת המישור היא** $z+d=0$ **.**

נתון גם כי $C(0,\sqrt{3},0)$ **, כלומר** $z_C=0$ **, ומכאן שמשוואת המישור** ABC **היא** $z=0$ **(מישור** $[x,y]$**)**

תשובה: משוואת המישור ABC **היא** $z=0$ **.**

ג. נמצא את משוואת המישור העובר בנקודה C, מקביל למקצוע AB, ויוצר זווית של $30°$ עם המישור ABC .

$\overrightarrow{AB}=-\underline{u}+\underline{v}=-\underline{(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-2)}+\underline{(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-2)}=(3,0,0)$ **.**

כלומר המישור המבוקש מקביל לציר ה- x **ושיעור ה-** x **של הנורמל למישור הוא** 0 **.**

(או - אם $\underline{n}=(a,b,c)$ **וקטור המקדמים של המישור המבוקש, אז** $a\cdot 3+b\cdot 0+c\cdot 0=0 \quad \to a=0$ **)**

וקטור המקדמים של המישור המבוקש הוא $\underline{n}=(0,b,c)$ **.**

המישור יוצר זווית של $30°$ **עם המישור** ABC **, שמשוואתו** $z=0$ **.**

$$\cos 30° = \frac{|(0,0,1)(0,b,c)|}{|(0,0,1)||(0,b,c)|}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{|c|}{\sqrt{b^2+c^2}} \quad \to \frac{3}{4}=\frac{c^2}{b^2+c^2}$$

$$3b^2+3c^2=4c^2 \quad \to 3b^2=c^2$$

נסמן $b=1$ **, ונקבל** $c=\pm\sqrt{3}$ **ושתי משוואות המישור הן:** $y\pm\sqrt{3}\,z+d=0$ **.**

נציב $C(0,\sqrt{3},0)$ **ונקבל שבשתי האפשרויות למשוואת המישור** $d=-\sqrt{3}$ **.**

תשובה: משוואת המישור היא $y+\sqrt{3}\,z-\sqrt{3}=0$ **, או** $y-\sqrt{3}\,z-\sqrt{3}=0$ **.**

נתון כי $\frac{z_1}{z_2}$ **הוא מספר מדומה טהור, ויש להראות כי הישר העובר בראשית (O) דרך** z_1**,**

מאונך לישר העובר בראשית ודרך z_2 **- כלומר להראות כי מכפלת השיפועים שווה ל-** -1**.**

נסמן $z_1 = a + bi$ **(** $m_{z_1O} = \frac{b}{a}$ **) ו-** $z_2 = c + di$ **(** $m_{z_2O} = \frac{d}{c}$ **).**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di}$$

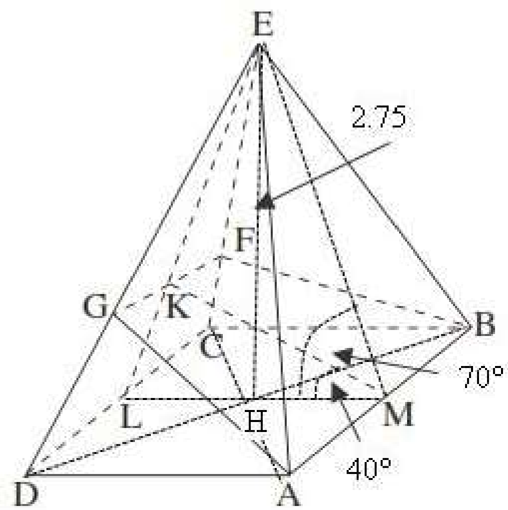
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2}$$

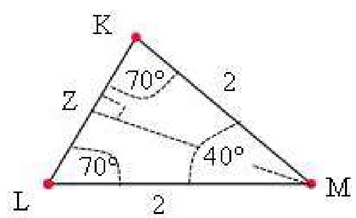
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2} i$$

נתון כי החלק הממשי שווה ל- 0**, לכן** $ac + bd = 0$**, או** $bd = -ac$**.**

ומכאן ש $\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = -1$**, כלומר הישרים מאונכים זה לזה.**

תשובה: הוּכַח.





EL הוא גובה ל DC בפאה EDC ,
ולכן גם תיכון בפאה שהיא משולש שווה שוקיים.
כלומר, L אמצע המקצוע DC במישור הבסיס $ABCD$.
KM הוא אנך אמצעי ל- AB ,
מכאן שגם M אמצע הצלע הנגדית במישור הבסיס $ABCD$.
לכן LM עובר בנקודת מפגש אלכסוני הבסיס H (ונחצה בה)
וגם הוא אנך ל- AB .
הזווית שבין המישור $GFBA$ לבסיס הפירמידה $ABCD$
היא הזווית בין שני האנכים לישר החיתוך
(מקצוע הבסיס AB), כלומר $\sphericalangle KML$.
$\sphericalangle KLM$ היא הזווית שבין הפאה הצדדית EDC לבסיס,
כלומר במשולש KML נתונות כל הזוויות (במקרה הוא משולש שווה שוקיים).
נעביר גובה MZ , ולכן הוא גם תיכון $(KZ = LZ)$.

הזווית בין הפאה לבסיס מתקבלת גם במשולש EMH ,
שבו נתון גובה הפירמידה 2.75 ס"מ $= EH$.

$\underline{\Delta EMH}$

$$\tan \sphericalangle EMH = \frac{EH}{MH}$$

$$\tan 70° = \frac{2.75}{MH}$$

$$MH = \frac{2.75}{\tan 70°}$$

$$\boxed{MH = 1} \quad \rightarrow \boxed{LM = 2}$$

$\underline{\Delta ZML}$

$$\cos \sphericalangle ZLM = \frac{LZ}{LM}$$

$$\cos 70° = \frac{LZ}{2}$$

$$LZ = 2\cos 70°$$

$$\boxed{LM = 0.684} \quad \rightarrow \boxed{KL = 1.368}$$

תשובה: האורך של הקטע KL הוא 1.368 ס"מ.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a\ell nx}{\sqrt{x}}$ **,** $a<0$ **.**

(1) תחום ההגדרה, הן עקב הפונקציה הלוגריתמית, והן עקב הביטוי בשורש ובמכנה הוא $x>0$ **.**

תשובה: $x>0$ **.**

(2) בנקודות החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

לכן $\ell nx=0$ **, ומכאן ש-** $x=1$ **ונקודת החיתוך היחידה היא** $(1,0)$ **.**

עקב תחום ההגדרה הפונקציה אינה חותכת את ציר ה- y **.**

תשובה: $(1,0)$ **.**

(3) נמצא תחומי עלייה וירידה:

$$f'(x)=a\cdot\frac{\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{\ell nx}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$f'(x)=a\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ell nx}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2-\ell nx}{2x\sqrt{x}}}$$

$$0=2-\ell nx$$

$$\ell nx=2$$

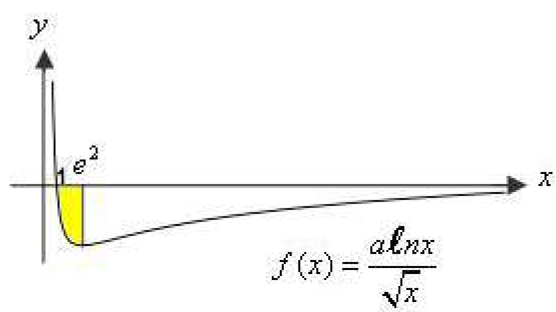
$$x=e^2$$

$$f(e^2)=\frac{a\ell ne^2}{\sqrt{e^2}}=\frac{2a}{e}=0.736a,\ f(e)=\frac{a\ell ne}{\sqrt{e}}=\frac{a}{\sqrt{e}}=0.6a,\ f(e^3)=\frac{a\ell ne^3}{\sqrt{e^3}}=\frac{3a}{\sqrt{e^3}}=0.67a$$

כיוון ש $a<0$ **מתקבל ש-** $0.736a$ **הוא הערך המינימלי של הפונקציה.**

תשובה: תחום ירידה: $0<x<e^2$ **, תחום עלייה:** $x>e^2$ **.**

ב. הסקיצה המתאימה (כולל סימון השטח לסעיף ג)



ג. נחשב את הנפח המבוקש ונשווה אותו ל $\frac{8\pi}{3}$.

$$V=\pi\int_{1}^{e^2}(\frac{a\ell nx}{\sqrt{x}})^2\ dx$$

$$V=\pi\int_{1}^{e^2}(a^2\ \frac{\ell n^2x}{x})\ dx$$

$$V=\pi a^2\int_{1}^{e^2}(\ell n^2x\cdot\frac{1}{x})\ dx$$

$$V=\frac{\pi a^2\ell n^3x}{3}\Big]_{1}^{e^2}$$

$$V=\frac{\pi a^2}{3}(\ell n^3\ e^2-\ell n^3\ 1)$$

$$V=\frac{\pi a^2}{3}(8-0)$$

$$\boxed{V=\frac{8\pi a^2}{3}}$$

$$\frac{8\pi a^2}{3}=\frac{8\pi}{3}$$

$$a^2=1$$

$$\boxed{a=-1}\quad\leftarrow a<0$$

תשובה: $a=-1$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=(x^2-a)e^{-0.5x^2}$, המוגדרת לכל x , a הוא פרמטר.

(1) נראה שהפונקציה זוגית.

$$f(-x)=((-x)^2-a)e^{-0.5(-x)^2}$$
$$f(-x)=(x^2-a)e^{-0.5x^2}$$
$$f(-x)=f(x)$$

תשובה: הפונקציה זוגית.

(2) נראה שפונקצית הנגזרת אי-זוגית.

$$f'(x)=2xe^{-0.5x^2}+(x^2-a)e^{-0.5x^2}(-x)$$
$$\boxed{f'(x)=xe^{-0.5x^2}(2-x^2+a)}$$
$$f'(-x)=(-x)e^{-0.5(-x)^2}(2-(-x)^2+a)$$
$$f'(-x)=-xe^{-0.5x^2}(2-x^2+a)$$
$$f'(-x)=-f'(x)$$

תשובה: פונקציית הנגזרת אי-זוגית.

ב. כיוון שגרף פונקציית הנגזרת חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=\sqrt{2.5}$ הרי ש- $f'(\sqrt{2.5})=0$.

$$0=\sqrt{2.5}e^{-0.5\sqrt{2.5}^2}(2-\sqrt{2.5}^2+a)$$
$$2-2.5+a=0$$
$$\boxed{a=0.5}$$

$$\boxed{f(x)=(x^2-0.5)e^{-0.5x^2}}$$
$$f'(x)=xe^{-0.5x^2}(2.5-x^2)$$
$$\boxed{f'(x)=e^{-0.5x^2}(2.5x-x^3)}$$
$$f''(x)=-xe^{-0.5x^2}(2.5x-x^3)+e^{-0.5x^2}(2.5-3x^2)$$
$$\boxed{f''(x)=e^{-0.5x^2}(x^4-5.5x^2+2.5)}$$
$$0=x^4-5.5x^2+2.5 \quad \to (x^2)_{1,2}=\frac{5.5\pm 4.5}{2}$$
$$x^2=5 \quad \to x=\sqrt{5} \quad \leftarrow x>0$$
$$x^2=0.5 \quad \to x=\sqrt{0.5} \quad \leftarrow x>0$$
$$f''(\sqrt{0.1})=+(0.01-0.55+2.5)>0,\ f''(1)=+(1-5.5+2.5)<0,\ f''(4)+(256-22+2.5)>0$$

בנקודה $x=\sqrt{0.5}$ עוברת פונקציית הנגזרת מעלייה לירידה ולכן מקסימום.

בנקודה $x=\sqrt{5}$ עוברת פונקציית הנגזרת מירידה לעלייה ולכן מינימום. $x=0$ מינימום קצה.

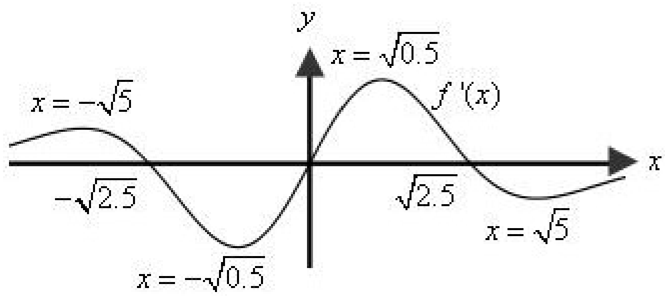
$f'(x)$ מתאפסת בתחום הנתון רק ב- $x=0, x=\sqrt{2.5}$ ולכן נקודות הקיצון הפנימיות הן המוחלטות (על פי ציור).

תשובה: $x=\sqrt{0.5}$ מקסימום מוחלט , $x=\sqrt{5}$ מינימום מוחלט.

ג. עקב אי-זוגיות פונקציית הנגזרת נקבל כי הפונקציה סימטרית לראשית הצירים,

כאשר $x=-\sqrt{0.5}$ מינימום מוחלט , $x=-\sqrt{5}$ מקסימום מקומי.

הסקיצה המתאימה:



ד. הפונקציה שיש להביא *לקיצון* היא *שיפועי המשיק* , כלומר *פונקציית הנגזרת*.

(1) בנקודה שבה $x=\sqrt{0.5}$ שיפוע המשיק הוא מקסימלי, כי בה מתקיים מקסימום מוחלט לפונקציית הנגזרת.

תשובה: $x=\sqrt{0.5}$, עבורו שיפוע המשיק מקסימלי.

(2) בנקודה שבה $x=-\sqrt{0.5}$ שיפוע המשיק הוא מינימלי, כי בה מתקיים מינימום מוחלט לפונקציית הנגזרת.

תשובה: $x=-\sqrt{0.5}$, עבורו שיפוע המשיק מינימלי.