א. נסמן $P(s,t)$, נקודה על המקום הגיאומטרי.

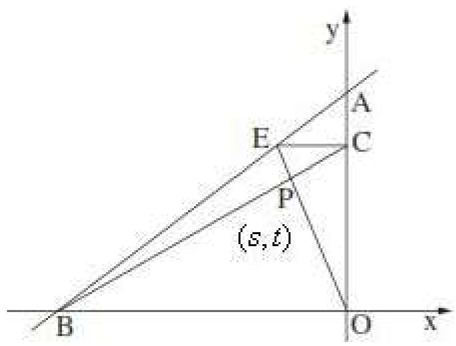
EC **מקביל לציר ה-** x **, ולכן** $y_E = y_C$ **.**

נמצא שתי משוואות המבוססות על שיפועי הישרים העוברים דרך E **.**

$$\frac{y_E - 0}{x_E - 0} = \frac{t-0}{s-0} \quad \rightarrow (1) \quad \frac{y_E}{x_E} = \frac{t}{s}$$

$$\frac{y_C - 0}{0+8} = \frac{t-0}{s+8} \quad \rightarrow (2) \quad \frac{y_E}{8} = \frac{t}{s+8}$$

$$\rightarrow \frac{(1)}{(2)} \quad \frac{8}{x_E} = \frac{s+8}{s}$$



$$x_E = \frac{8s}{s+8} \quad \rightarrow y_E = \frac{t}{s} \cdot \frac{8s}{s+8} = \frac{8t}{s+8} \quad \rightarrow E(\frac{8s}{s+8}, \frac{8t}{s+8})$$

נמצא את משוואת הישר AB **ונציב בה את שיעורי הנקודה** E**.**

$$m_{AB} = \frac{6-0}{0+8} = \frac{3}{4} \quad \rightarrow y = \frac{3}{4}x + 6$$

$$\frac{8t}{s+8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8s}{s+8} + 6$$

$$\frac{8t}{s+8} = \frac{6s}{s+8} + 6$$

$$8t = 6s + 6s + 48$$

$$8t = 12s + 48$$

$$t = 1.5s + 6$$

$$\boxed{y = 1.5x + 6}$$

המקום הגיאומטרי הוא הישר $y = 1.5x + 6$ **עבור** $-8 < x < 0$ **, כי** E **על הקטע** AB **ולא מתלכדת עם הקצוות,**

אך, על פי ניסוח השאלה יש להראות שהמקום הגיאומטרי מונח על הישר והוא אכן מונח על הישר $y = 1.5x + 6$ **.**

תשובה: המקום הגיאומטרי מונח על הישר $y = 1.5x + 6$ **.**

ב. E **היא מרכז המעגל החוסם את המשולש** ABO **, שהוא ישר זווית, ולכן היא אמצע היתר ושיעוריה** $(-4, 3)$ **.**

נמצא את שיעור ה- x **של הנקודה** P_0 **, באמצעות שיעורי הנקודה** $E(\frac{8s}{s+8}, \frac{8t}{s+8})$ **.**

$$-4 = \frac{8s}{s+8}$$

$$-4s - 32 = 8s$$

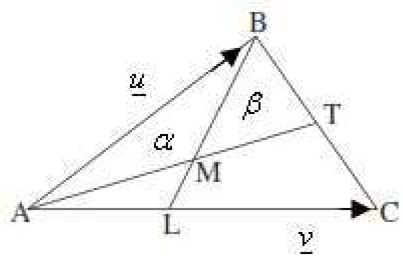
$$s = -\frac{8}{3} \quad \rightarrow x_{P_0} = -\frac{8}{3}$$

שטח המשולש AP_0O **שווה -** $\frac{AO \cdot (-x_{P_0})}{2} = \frac{6 \cdot \frac{8}{3}}{2} = 8$

א. נמצא את הערך של α ושל β בעזרת יחידות ההצגה,

כאשר נבטא את הווקטור $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ בדרך חלופית

ונשווה את המקדמים של $\underline{u}$ ל- 1 ושל ל- 0.



$$\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{u}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AC}=\underline{v}}$$

$$\overrightarrow{AT}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AT}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}}$$

$$\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AT}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\alpha\underline{u}+\frac{1}{2}\alpha\underline{v}}$$

$$\frac{AL}{LC}=\frac{3}{4}\quad\rightarrow AL=\frac{3}{7}AC$$

$$\boxed{\overrightarrow{AL}=\frac{3}{7}\underline{v}}$$

$$\overrightarrow{BM}=\beta\overrightarrow{BL}$$

$$\overrightarrow{BM}=\beta(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AL})$$

$$\boxed{\overrightarrow{BM}=\beta(-\underline{u}+\frac{3}{7}\underline{v})}$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\alpha\underline{u}+\frac{1}{2}\alpha\underline{v}+\beta\underline{u}-\frac{3}{7}\beta\underline{v}}$$

$$(1)\quad \frac{1}{2}\alpha+\beta=1$$

$$(2)\quad \frac{1}{2}\alpha-\frac{3}{7}\beta=0$$

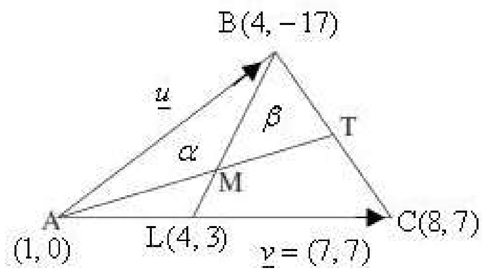
$$(1)-(2)\quad \boxed{\beta=0.7}\quad\rightarrow\boxed{\alpha=0.6}$$

תשובה: $\alpha=0.6$ **,** $\beta=0.7$ **.**

ב. נתון: $AT=\sqrt{50}$, $\underline{v}=(7,7)$, $A(1,0)$.

(1) נסמן $B(s,t)$ **, נקודה על המקום הגיאומטרי**

$$\overrightarrow{AC}=\underline{C}-\underline{A}$$
$$\underline{(7,7)}=\underline{C}-\underline{(1,0)}$$
$$\boxed{C(8,7)}$$
$$BT=TC \quad \rightarrow T(\frac{s+8}{2},\frac{t+7}{2})$$
$$AT=\sqrt{50} \quad \rightarrow \sqrt{(\frac{s+8}{2}-1)^2+(\frac{t+7}{2}-0)^2}$$
$$50=(\frac{s+6}{2})^2+(\frac{t+7}{2})^2$$
$$\boxed{200=(x+6)^2+(y+7)^2}$$



תשובה: המקום הגיאומטרי הוא $(x+6)^2+(y+7)^2=200$.

(2) נשתמש בנתוני הסעיפים הקודמים, כמוסבר בשאלה.

$$\overrightarrow{AL}=\frac{3}{7}\underline{v}=\frac{3}{7}\cdot\underline{(7,7)}=\underline{(3,3)}$$
$$\overrightarrow{AL}=\underline{L}-\underline{A}$$
$$\underline{(3,3)}=\underline{L}-\underline{(1,0)}$$
$$\boxed{L(4,3)}$$

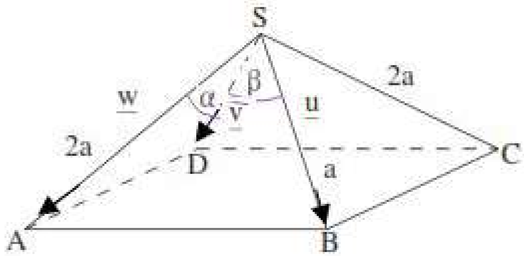
תשובה: $L(4,3)$.

(3) MB **מקביל לציר ה-** y **, לכן** $x_B=x_M=x_L=4$.

$$(4+6)^2+(y+7)^2=200$$
$$(y+7)^2=100$$
$$y+7=10 \quad \rightarrow y=3 \quad \textit{not valid}, y_B\neq y_L$$
$$y+7=-10 \quad \rightarrow y=-17$$
$$\boxed{B(4,-17)}$$

תשובה: $B(4,-17)$.

(1)



$$\boxed{\overrightarrow{SB}=\underline{u}} \quad |\underline{u}|=a \quad \underline{u}^2=a^2$$

$$\boxed{\overrightarrow{SD}=\underline{v}} \quad |\underline{v}|=a \quad \underline{v}^2=a^2$$

$$\boxed{\overrightarrow{SA}=\underline{w}} \quad |\underline{w}|=2a \quad \underline{w}^2=4a^2$$

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=0 \quad \underline{v}\cdot\underline{w}=2a^2\cos\alpha \quad \underline{u}\cdot\underline{w}=2a^2\cos\beta$$

$$\boxed{\overrightarrow{DC}=-\underline{w}+\underline{u}}$$

$$\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DC}$$

$$\boxed{\overrightarrow{SC}=\underline{v}-\underline{w}+\underline{u}}$$

תשובה: $\overrightarrow{SC}=\underline{v}-\underline{w}+\underline{u}$

(2) ננתח את משמעות הנתונים החדשים.

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=0 \quad \underline{v}\cdot\underline{w}=2a^2\cos\alpha \quad \underline{u}\cdot\underline{w}=2a^2\cos\beta$$

$$SD=SB \quad \to |\underline{v}|=|\underline{u}|=a$$

$$\sphericalangle DSB=90^\circ \quad \to \underline{u}\cdot\underline{v}=0$$

$$\sphericalangle ASD=\alpha \quad \to \underline{v}\cdot\underline{w}=|\underline{v}||\underline{w}|\cos\alpha=2a^2\cos\alpha$$

$$\sphericalangle ASB=\beta \quad \to \underline{u}\cdot\underline{w}=|\underline{u}||\underline{w}|\cos\beta=2a^2\cos\beta$$

$$SC=SA \quad \to \left|\overrightarrow{SC}\right|=\left|\overrightarrow{SA}\right|$$

$$\sqrt{\underline{u}^2+\underline{v}^2+\underline{w}^2+2\underline{u}\cdot\underline{v}-2\underline{u}\cdot\underline{w}-2\underline{v}\cdot\underline{w}}=|\underline{w}|$$

$$a^2+a^2+4a^2-0-4a^2\cos\beta-4a^2\cos\alpha=4a^2 \quad / a^2>0$$

$$2-4\cos\beta-4\cos\alpha=0$$

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}}$$

תשובה: הוכַח.

(1) נפתור את המשוואה z המקיימים $|z|i+2z=\sqrt{3}$.

נסמן $z=a+bi$

$$|z|i+2z=\sqrt{3}$$
$$|a+bi|i+2(a+bi)=\sqrt{3}$$
$$\sqrt{a^2+b^2}\,i+2a+2bi=\sqrt{3}$$
$$R \quad 2a=\sqrt{3} \quad \to a=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$I \quad \sqrt{\frac{3}{4}+b^2}+2b=0$$
$$\sqrt{\frac{3}{4}+b^2}=-2b$$
$$\frac{3}{4}+b^2=4b^2$$
$$b=\frac{1}{2} \quad \sqrt{\frac{3}{4}+(\frac{1}{2})^2}=-2(\frac{1}{2}) \quad \to + = - \quad \to not\ o.k.$$
$$b=-\frac{1}{2} \quad \sqrt{\frac{3}{4}+(-\frac{1}{2})^2}=-2(-\frac{1}{2}) \quad \to 1=1 \quad o.k.$$
$$\boxed{z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$$

תשובה: $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

(2) נעבור להצגה טריגונומטרית:

$$\tan\theta=\frac{-1/2}{\sqrt{3}/2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\theta=-30°+180°k$$
$$\theta=-30° \quad \leftarrow 4nd\ quadrant$$
$$R=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(-\frac{1}{2})^2}=1$$
$$z=cis\,(-30)°$$

ובהתאם על פי משפט דה-מואבר $z^{6n}=1^{6n}cis((-30)°\cdot 6n)=cis\,(-180n)°$.

עבור n **אי זוגי נקבל** $z^{6n}=cis\,(-180)°=-1$.

עבור n **זוגי נקבל** $z^{6n}=cis\,(0)°=1$.

תשובה: קיימים רק שני ערכים אפשריים ל- z^{6n} **והם :** -1 **ו-** 1.

א. נתונה פונקציית הנגזרת $f'(x)=\dfrac{2\ell n\, x\cdot(2-\ell n\, x)}{x\cdot(1-\ell n\, x)^2}$.

(1) הארגומנט של פונקציית ה- ℓn **צ"ל חיובי ושני הגורמים במכפלת מכנה הנגזרת צריכים להיות שונים מ-** 0 .

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x>0\\(2)\ x\neq 0\\(3)\ 1-\ell n\, x\neq 0\quad\to \ell n\, x\neq 1\quad\to x\neq e\end{array}\right\}\boxed{x>0,\ x\neq e}$$

תשובה: $x>0,\ x\neq e$.

(2) מכנה הנגזרת מתאפס גם עבור $x=e$.

$$\lim_{x\to e}\frac{2\ell n\, x\cdot(2-\ell n\, x)}{x\cdot(1-\ell n\, x)^2}=\lim_{x\to e}\frac{2\ell n\, e\cdot(2-\ell n\, e)}{e\cdot(1-\ell n\, e)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{e\cdot(1-\ell n\,(e+h))^2}=\lim\frac{2}{e\cdot 0^+}=+\infty$$

כלומר הנגזרת שואפת ל- $+\infty$ **כאשר מתקרבים לישר** $x=e$ **ולכן הוא אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה.**

תשובה: $x=e$.

(3) נשווה את מונה הנגזרת ל- 0**, על מנת למצוא נקודות חיתוך עם ציר ה-** x .

$$f'(x)=\frac{2\ell n\, x\cdot(2-\ell n\, x)}{x\cdot(1-\ell n\, x)^2}$$

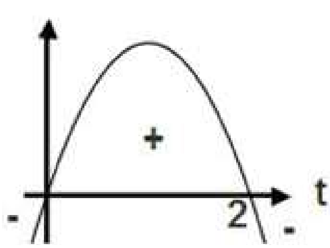
$$\ell n\, x=0\quad\to x=1\quad\to \boxed{(1,0)}$$

$$\ell n\, x=2\quad\to x=e^2\quad\to \boxed{(e^2,0)}$$

תשובה: נקודות חיתוך עם ציר x **:** $(1,0)$ **,** $(e^2,0)$**, אין נקודות חיתוך עם ציר ה-** y .

(4) נמצא תחומי חיוביות שליליות, על פי גרף הפרבולה בעלת המקסימום של המונה $2t(2-t)$ $(t=\ell n\, x)$ **,**

ובמגבלות תחום ההגדרה, כמובן.



$$0<\ell n\, x<2\quad\to 1<x<e^2,\ x\neq e$$

$$\ell n\, x<0\quad\to 0<x<1\quad\cup\quad \ell n\, x>2\quad\to x>e^2$$

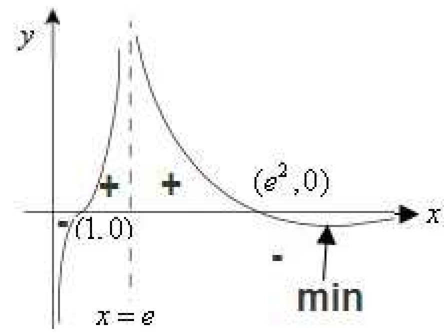
תשובה: חיוביות: $1<x<e^2,\ x\neq e$ **, שליליות:** $x>e^2$ **או** $0<x<1$

ב. קיימת אסימפטוטה אופקית $y=0$, ובהתאם חייבת להיות נקודת מינימום אחת, בתחום $x>e^2$,

כי הפונקציה עוברת מחיוביות לשליליות עבור $x=e^2$.

נצא מהנחה שאין נקודות קיצון נוספות (או מעל לנקודת פיתול אחת בפונקציה $f(x)$),

כי לא התבקשנו למצוא תחומי עלייה וירידה, אלא לצייר בהתאם לתחומי חיוביות ושליליות והאסימפטוטה $y=0$.



ג. הישר $y=-4$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x>e$.

(1) בנקודה זו ערך הנגזרת שווה ל- 0, כי $y=-4$ פונקציה קבועה, ולכן $x=e^2$.

תשובה: $(e^2,-4)$

(2) $(e^2,-4)$ **היא נקודת מקסימום, כי הנגזרת** $(f'(x))$ **עוברת מחיוביות לשליליות על פי תת סעיף א (4).**

ובהתאם הפונקציה $f(x)$ עוברת מעלייה לירידה, ולכן $f(e^3)<f(e^2)=-4$.

תשובה: הוכַח, כי $f(e^3)<-4$.

(3) על פי ציור גרף הנגזרת השטח המבוקש נמצא מתחת לציר ה- x , ונתון כי גודלו 0.5.

$$S=\int_{e^2}^{e^3}(0-f'(x)\,dx$$

$$S=-f(x)\Big]_{e^2}^{e^3}$$

$$S=-f(e^3)-(-f(e^2))$$

$$0.5=-f(e^3)-4$$

$$\boxed{f(e^3)=-4.5}$$

תשובה: $f(e^3)=-4.5$.

הערה – גודל השטח שווה ל- 1 ולא ל- 0.5 , אבל התשובה ניתנה בהתאם לפתרון המקורי.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{a^{x+1}}{a^{2x}-1}$ **,** $0<a<1$ **.**

מכנה הפונקציה צריך להיות שונה מ- 0 **.**

$$a^{2x}-1\neq 0 \quad \rightarrow a^{2x}\neq 1$$

$$2x\neq 0 \quad \rightarrow \boxed{x\neq 0}$$

תשובה: $x\neq 0$ **.**

ב. נראה כי הפונקציה היא אי-זוגית, כלומר $f(-x)=-f(x)$ **(פונקציה סימטרית לראשית הצירים).**

$$f(-x)=\frac{a^{-x+1}}{a^{-2x}-1}$$

$$f(-x)=\frac{a^{-x+1}}{\frac{1}{a^{2x}}-1}=\frac{a^{-x+1}}{\frac{1-a^{2x}}{a^{2x}}}=\frac{a^{-x+1}\cdot a^{2x}}{1-a^{2x}}=\frac{a^{x+1}}{1-a^{2x}}=-\frac{a^{x+1}}{a^{2x}-1}$$

$$\boxed{f(-x)=-f(x)}$$

תשובה: הוכַח.

ג. נמצא תחומי עלייה וירידה, כאשר נשים לב כי $\ell n a<0$ **כי** $0<a<1$ **.**

$$f'(x)=\frac{a^{x+1}\cdot \ell n a\cdot (a^{2x}-1)-2a^{2x}\cdot \ell n a\cdot a^{x+1}}{(a^{2x}-1)^2}$$

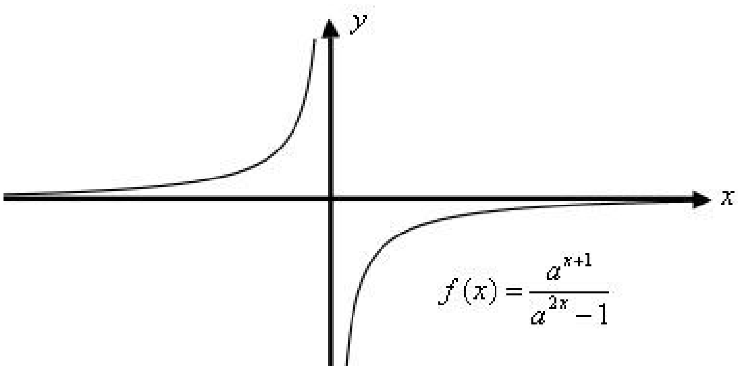
$$f'(x)=\frac{a^{x+1}\cdot \ell n a\cdot (a^{2x}-1-2a^{2x})}{(a^{2x}-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{a^{x+1}\cdot \ell n a\cdot (-a^{2x}-1)}{(a^{2x}-1)^2}}$$

לכל $x\neq 0$ **: המכנה חיובי ,** a^{x+1} **חיובי,** $\ell n a<0$ **,** $-a^{-2x}-1<0$ **ובהתאם המנה חיובית לכל** $x\neq 0$ **.**

תשובה: הפונקציה עולה עבור $x>0$ **או** $x<0$ **, יורדת לאף** x **.**

ד. הסקיצה המתאימה משמאל:



ה. עבור $x=1$ **שיעור ה-** y **בנקודת ההשקה**

הוא $\dfrac{a^{1+1}}{a^{2\cdot 1}-1}=\dfrac{a^2}{a^2-1}$ **.**

שיפוע המשיק בנקודה T **שווה לשיפוע**

המשיק ℓ **כי המשיקים מקבילים,**

ועקב זוגיות פונקציית הנגזרת, $f'(-x)=f'(x)$ **,**

הוא יתקבל עבור $x=-1$ **בנקודה** T **, כי זו הנקודה היחידה שבה המשיק מקביל לישר** ℓ **.**

הפונקציה $f(x)$ **אי-זוגית, כלומר** $f(-x)=-f(x)$ **, ולכן** $f(-1)=-f(1)=-\dfrac{a^2}{a^2-1}=\dfrac{a^2}{1-a^2}$ **.**

תשובה: $\mathrm{T}(-1,\dfrac{a^2}{1-a^2})$ **.**