א. נתונות הנקודות $A(-a,0)$ **ו-** $B(a,0)$ $(a>0)$ **.**

נסמן $P(s,t)$ **, נקודה על המקום הגיאומטרי, כך ש-** $PA=2PB$ **.**

$$\sqrt{(s+a)^2+(t-0)^2}=2\sqrt{(s-a)^2+(t-0)^2} \quad ()^2$$
$$s^2+2as+a^2+t^2=4\cdot(s^2-2as+a^2+t^2)$$
$$-3a^2=3s^2-10as+3t^2 \quad /:3$$
$$-a^2=s^2-\frac{10}{3}as+t^2$$
$$\frac{25}{9}a^2-a^2=(s-\frac{5}{3}a)^2+t^2$$
$$\frac{16}{9}a^2=(s-\frac{5}{3}a)^2+t^2$$

וזו משוואת המעגל $(x-\frac{5}{3}a)^2+y^2=\frac{16}{9}a^2$ **, שמרכזו** $(\frac{5}{3}a,0)$ **ורדיוסו** $\frac{4}{3}a$ $(a>0)$ **.**

מקום גיאומטרי זה מתלכד עם זה של המספרים המרוכבים המקיימים $|z+b|=4$ **.**

נסמן $z=x+yi$ **(** a,b,x,y **ממשיים), ונקבל :**

$$|x+yi+b|=4$$
$$|x+b+yi|=4$$
$$\sqrt{(x+b)^2+y^2}=4$$
$$(x+b)^2+y^2=16$$

וזו משוואת המעגל שמרכזו $(-b,0)$ **ורדיוסו** 4 **.**

שני המקומות הגיאומטרים מתלכדים ולכן $\frac{4}{3}a=4$ **, כלומר** $a=3$ **,**

ו- $\frac{5}{3}a=-b$ **, ומכאן ש-** $-\frac{5}{3}\cdot 3=b$ **ו-** $b=-5$ **.**

ולכן משוואת המקום הגיאומטרי היא המעגל $(x-5)^2+y^2=16$ **, שמרכזו** $(5,0)$ **ורדיוסו** 4 **.**

תשובה: $a=3$ **,** $b=-5$ **.**

ב. מלבן TNEF **, שצלעותיו מקבילות לצירים, חסום במעגל** $(x-5)^2+y^2=16$**, כאשר** $y_E=y_F<0$ **.**

נתון כי הנקודה C **נמצאת על ציר ה-** x **, כך ש-** $\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{CF}=-16$ **ו- שיעורי הקדקוד** C **הם** $(x,0)$**.**

נשים לב שמרכז המעגל, $M(5,0)$**, נמצא במרחק** 4 **משני הקדקודים** N, F **, והזווית** $\measuredangle NMF=180°$ **.**

ולכן $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MF}=|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{MF}|\cdot cos\measuredangle NMF=4\cdot4\cdot cos(180°)=-16$**.**

מכאן שהנקודה C **היא מרכז המעגל ושיעוריה** $(5,0)$**.**

נפתור גם בדרך השגרתית, הרגילה.

המספר המרוכב $z=2+iy$ **מייצג את הקדקוד** T **של המעגל, לכן** $x_T=2,\ y_T>0$**.**

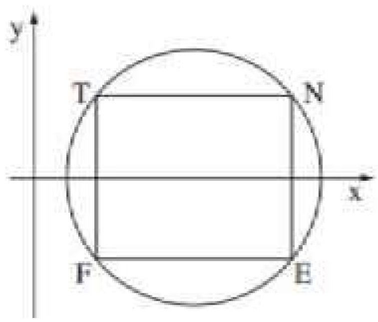
נציב $x=2$ **במשוואת המעגל ונקבל :** $(2-5)^2+y^2=16\ \ \rightarrow y^2=7\ \ \rightarrow y=\sqrt{7}\ \ \rightarrow T(2,\sqrt{7})$

עקב הסימטריה של המעגל לציר ה- x **שיעורי הקדקוד** F **הם** $(2,-\sqrt{7})$**.**

עקב הסימטריה של המעגל לישר $x=5$ **שיעורי הקדקוד** N **הם** $(8,\sqrt{7})$**.**

$\overrightarrow{CF}=\underline{F}-\underline{C}\ =\underline{x}=(2-x,-\sqrt{7})$ **,** $\overrightarrow{CN}=\underline{N}-\underline{C}\ =\underline{x}=(8-x,\sqrt{7})$

$$\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{CF}=-16$$
$$(8-x,\sqrt{7})\cdot(2-x,-\sqrt{7})=-16$$
$$(8-x)(2-x)-7=-16$$
$$16-10x+x^2-7=-16$$
$$x^2-10x+25=0$$
$$(x-5)^2=0$$
$$x=5$$



הציור באדיבות אתר משרד החינוך

מתקבל ששיעורי הנקודה C **הם** $(5,0)$**.**

תשובה: שיעורי הנקודה C **הם** $(5,0)$**.**

א. הישר ℓ **עובר דרך הנקודות** $A(0,0,1)$ **ו-** $B(1,1,0)$ **.**

נמצא את ההצגה הפרמטרית של הישר:

$\overrightarrow{AB} = \underline{B} - \underline{A} = \underline{x} = (1,1,-1)$ **, ולכן** $\ell = (0,0,1) + t(1,1,-1)$ **.**

ℓ **מאונך למישור** π_1 **וחותך אותו בנקודה** D **.**

נמצא את שיעורי הנקודה D**.**

משוואת המישור π_1 **היא** $x+y-z+d=0$ **, כי הווקטור** $\underline{x} = (1,1,-1)$ **הוא הנורמל למישור.**

π_1 **עובר בראשית הצירים, ולכן** $d=0$ **ומשוואת המישור** π_1 **היא** $x+y-z=0$**.**

נקודה טיפוסית על הישר ℓ **היא** $(t,t,1-t)$ **- נציב אותה במשוואת המישור.**

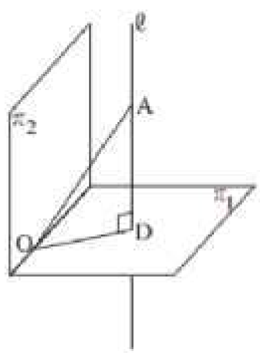
$t+t-(1-t)=0 \quad \to t=\frac{1}{3}$ **ונקודת החיתוך היא** $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$**.**

ℓ **מאונך למישור** π_1 **ולכן** ΔOAD **ישר זווית ושטחו** $\frac{OD \cdot AD}{2}$ **.**

$$OD = \sqrt{(\frac{1}{3}-0)^2 + (\frac{1}{3}-0)^2 + (\frac{1}{3}-0)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$AD = \sqrt{(\frac{1}{3}-0)^2 + (\frac{1}{3}-0)^2 + (\frac{2}{3}-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$S_{\Delta OAD} = \frac{OD \cdot AD}{2} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$



הציור באדיבות אתר משרד החינוך

תשובה: שטח המשולש OAD **הוא** $\frac{\sqrt{2}}{6}$ **.**

פתרון חלופי:

נשים לב כי AO **נמצא על ציר ה-** z **.**

מרחק ראשית הצירים $O(0,0,0)$ **מהנקודה** $A(0,0,1)$ **הוא** 1**.**

מרחק הנקודה $D(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ **מציר ה-** z **, תלוי בשיעורי ה-** x,y **שלו:** $h = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ **.**

$$S_{\Delta OAD} = \frac{AO \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

ב. (1) הישר ℓ מאונך למישור π_1 ולכן מאונך לכל ישר המוכל במישור.

ישר החיתוך שבין המישור π_1 למישור π_2 מוכל במישור π_1 (גם ב- π_2).

לכן הזווית שבין הישר ℓ לישר החיתוך היא זווית ישרה.

תשובה: הזווית בת $90°$.

(2) הישר ℓ מקביל למישור π_2, לכן המצב ההדדי בינו לבין ישר החיתוך הוא של הקבלה או הצטלבות.

(במקרה זה המצב ההדדי הוא הצטלבות). בכל מקרה המרחק ביניהם הוא כמרחקו של הישר ℓ ממישור π_2,

או כמרחקה של נקודה שעל הישר ℓ ממישור π_2.

ההצגה הפרמטרית של מישור π_2 המכיל את ציר ה- x ומקביל לישר ℓ היא: $\underline{x} = s(1,0,0) + r(1,1,-1)$

$$\left.\begin{array}{ll}(a,b,c)\,(1,0,0)=0 & \to a=0\\ (a,b,c)\,(1,1,-1)=0 & \to a+b-c=0\end{array}\right\} b=c \quad \to a=0,\, b=1,\, c=1$$

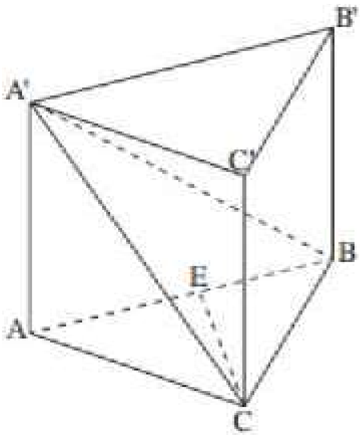
ומשוואת המישור π_2, העובר בראשית הצירים, היא $y+z=0$.

נמצא את המרחק של $\mathrm{A}(0,0,1)$ ממישור $\pi_2: y+z=0$:

$$d=\frac{|0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

תשובה: המרחק הוא $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

<u>הערה</u>: המישורים π_1 ו- π_2 מאונכים זה לזה, כי π_1 מאונך לישר ℓ שמקביל למישור π_2.



א. E **נמצאת על המקצוע** AB **כך ש-** $AE = kAB$ $\quad (0 < k < 1)$ **.**

נתון כי $\sphericalangle A'EA$ **היא הזווית שבין המישור** $A'EC$ **למישור** ABC **.**

לכן AE **הוא אנך לישר החיתוך** CE **(וגם** $A'E$**). כיוון ש-** ΔABC

שווה צלעות, הרי ש- CE **גובה ותיכון ל-** AB **ומכאן ש-** $k = 0.5$ **.**

תשובה: $k = 0.5$**.**

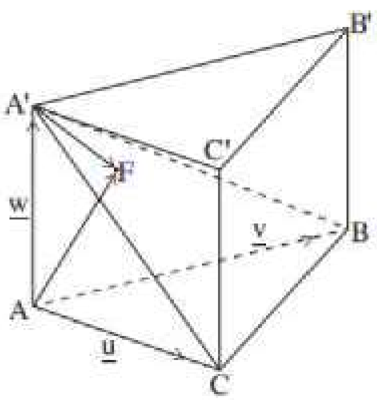
ב. נתון כי $AC = 2$ **,** $\sphericalangle A'EA = 45°$ **.** $AE = AB:2 = AC:2 = 2:2 = 1$ **.**

$\Delta A'EA$ **הוא ישר זווית ושווה שוקיים ולכן** $A'A = AE = 1$ **.**

$\Delta A'AC \cong \Delta A'AB$ **(משפט חפיפה צ.ז.צ.) ולכן** $\Delta A'BC$ **שווה שוקיים.**

אם T **אמצע מקצוע הבסיס** BC **, הרי ש** $AT, A'T$ **אנכים לישר החיתוך**

BC **שבין המישור** ABC **למישור** $A'BC$ **ו-** $\sphericalangle A'TA$ **היא הזווית שבין המישורים.**



הציור באדיבות אתר משרד החינוך

ב- ΔATB **על פי משפט פיתגורס,** $AT = \sqrt{3}$ **.**

ב- $\Delta A'TA$ **:** $\tan \sphericalangle A'TA = \dfrac{A'A}{AT} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \sphericalangle A'TA = 30°$

תשובה: הזווית בין המישורים היא בת $30°$ **.**

ג. גובה המנסרה הישרה מאונך למישור הבסיס ABC**.**

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \underline{u}} \quad |\underline{u}| = 2 \quad \underline{u}^2 = 4$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \underline{v}} \quad |\underline{v}| = 2 \quad \underline{v}^2 = 4$$

$$\boxed{\overrightarrow{AA'} = \underline{w}} \quad |\underline{w}| = 1 \quad \underline{w}^2 = 1$$

$$\underline{u} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cos \sphericalangle BAC = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60° = 2$$

$$\overrightarrow{A'F} = t\overrightarrow{A'C} + m\overrightarrow{A'B} \quad \rightarrow \overrightarrow{A'F} = t(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC}) + m(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{A'F} = t(-\underline{w} + \underline{u}) + m(-\underline{w} + \underline{v})$$

$$\boxed{\overrightarrow{A'F} = t\underline{u} + m\underline{v} + (-t - m)\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'F}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AF} = t\underline{u} + m\underline{v} + (1 - t - m)\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BC} = \underline{u} - \underline{v}}$$

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad \leftarrow \overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{BC}$$

$$t\underline{u}^2 - m\underline{v}^2 + (m - t)\underline{u}\underline{v} = 0 \quad \rightarrow 4t - 4m + (m - t) \cdot 2 = 0$$

$$4t - 4m + 2m - 2t = 0 \quad \rightarrow \boxed{t = m}$$

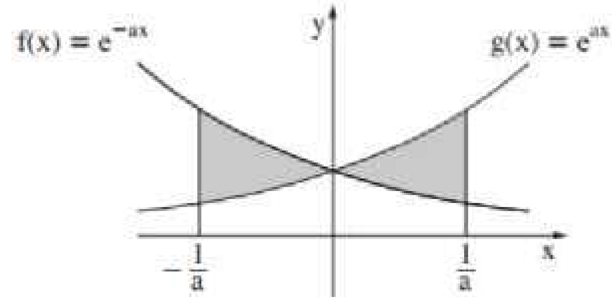
תשובה: הוכח.

א. נתונות הפונקציות $f(x)=e^{-ax}$ **,** $g(x)=e^{ax}$ **(** $a>0$ **).**

(1) $g(x)=e^{ax}$ **היא פונקציה עולה, העוברת בנקודה** $(0,1)$ **עם אסימפטוטה אופקית** $y=0$ **עבור** $x\to-\infty$ **.**

$f(x)=e^{-ax}$ **היא פונקציה יורדת, העוברת בנקודה** $(0,1)$ **עם אסימפטוטה אופקית** $y=0$ **עבור** $x\to\infty$ **.**

$x=\frac{1}{a}$ **ישר המקביל לציר ה-** x **מצידו הימני (** $a>0$ **),** $x=-\frac{1}{a}$ **ישר המקביל לציר ה-** x **מצידו השמאלי.**



הציור באדיבות אתר משרד החינוך

תשובה: הציור המתאים מלמעלה.

(2) $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ **כאשר** $f(-x)=g(x)$ **(או** $g(-x)=f(x)$ **).**

לכן הגרפים של $f(x)$ **עבור** $x\geq 0$ **ו-** $x<0$ **והגרפים של** $g(x)$ **עבור** $x\leq 0$ **ו-** $x>0$ **בהתאמה,**

סימטריים לציר ה- y **, ומכאן ששני השטחים האפורים שווים בשטחם, וכך גם נפחי גוף הסיבוב.**

$$V(a)=2\pi\left(\int_0^{\frac{1}{a}}(e^{ax})^2\,dx-\int_0^{\frac{1}{a}}(e^{-ax})^2\,dx\right)=2\pi\left(\int_0^{\frac{1}{a}}(e^{2ax}-e^{-2ax})dx\right)$$

$$V(a)=2\pi\left(\frac{e^{2ax}}{2a}-\frac{e^{-2ax}}{-2a}\right)\Big]_0^{\frac{1}{a}}=2\pi\left[\left(\frac{e^{2a\cdot\frac{1}{a}}}{2a}+\frac{e^{-2a\cdot\frac{1}{a}}}{2a}\right)-\left(\frac{e^{2a\cdot 0}}{2a}+\frac{e^{-2a\cdot 0}}{2a}\right)\right]$$

$$V(a)=2\pi\left(\frac{e^{2}}{2a}+\frac{e^{-2}}{2a}\right)-\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}\right)=\pi\cdot\frac{e^2+e^{-2}-2}{2a}$$

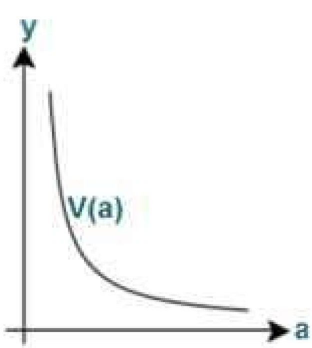
תשובה: פונקצית נפח גוף הסיבוב היא $V(a)=\pi\cdot\frac{e^2+e^{-2}-2}{a}$ **.**

(3) הפונקציה $V(a)=\pi\cdot\frac{e^2+e^{-2}-2}{a}$ **(** $a>0$ **) היא בתבנית של** $V(a)=k\cdot\frac{1}{a}$ **(** $k>0$ **),**

עם שתי אסימפטוטות המקבילות לצירים $x=0$ **ו-** $y=0$ **.**

הנגזרת הראשונה $V'(a)=-\frac{k}{a^2}$ **שלילית ולכן הפונקציה יורדת עבור** $a>0$ **,**

והנגזרת השנייה $V(a)=\frac{2k}{a^3}$ **חיובית ולכן הפונקציה קעורה כלפי מעלה עבור** $a>0$ **.**



תשובה: הסקיצה המתאימה משמאל.

נוסחת הגידול והדעיכה היא $M_t = M_0 \cdot q^t$

שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן הוא q. **פרק הזמן הוא** t.

M_0 **- הכמות ראשונית ,** M_t **- כמות לאחר** t **תקופות.**

בתאריך $1.1.2005$ **הופקדו** M_0 **שקלים בבנק א' ו-** M_0 **שקלים בבנק ב'.**

כעבור 7 **שנים היו בבנק א'** $M_7 = 12{,}298$ **שקלים ובבנק ב'** $M_7 = 13{,}162$

$$\begin{cases} (1) \quad 13{,}162 = M_0 \cdot q_2^{\,7} \\ (2) \quad 12{,}298 = M_0 \cdot q_1^{\,7} \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \quad \frac{6581}{6149} = \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^7 \quad \rightarrow \frac{q_2}{q_1} = \left(\frac{6581}{6149}\right)^{\frac{1}{7}}$$

כעבור t **שנים מהתאריך** $1.1.2005$ **יהיה בבנק ב' סכום כסף הגדול ב-** 25% **מסכום הכסף שיהיה בבנק א'.**

המשוואה המבוקשת היא : $M_0 \cdot q_2^{\,t} = 1.25 M_0 \cdot q_1^{\,t}$

$$q_2^{\,t} = 1.25 q_1^{\,t}$$

$$\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^t = 1.25$$

$$\left(\left(\frac{6581}{6149}\right)^{\frac{1}{7}}\right)^t = 1.25$$

$$\ell n\left(\frac{6581}{6149}\right)^{\frac{1}{7}} = \ell n 1.25$$

$$t \ell n\left(\frac{6581}{6149}\right)^{\frac{1}{7}} = \ell n 1.25$$

$$t = \frac{\ell n 1.25}{\ell n\left(\frac{6581}{6149}\right)^{\frac{1}{7}}}$$

$$\boxed{t \approx 23}$$

תשובה: כעבור 23 **שנים, בערך.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{kx}{\ell n\, x}$ **, כאשר** $k\neq 0$ **פרמטר.**

הביטוי $\ell n\, x$ **מתאפס עבור** $x=1$ **וכמו כן** $x>0$ **בשל פונקציית ה-** $\ell n\, x$ **שמקבלת רק מספרים חיוביים.**
תשובה: $x>0, x\neq 1$ **.**

ב. (1) נמצא לאילו ערכי k **יש לפונקציה** $f(x)$ **ערך מקסימלי, כלומר נקודת מקסימום מוחלט.**

$$f'(x)=k\cdot\frac{\ell n\, x-\frac{x}{x}}{\ell n^2 x}$$

$$\boxed{f'(x)=k\cdot\frac{\ell n\, x-1}{\ell n^2 x}}$$

$$\ell n\, x-1=0 \quad \to \ell n\, x=1 \quad \to x=e$$

עבור נקודת מקסימום מוחלט נדרשת עלייה עבור $1<x<e$ **וירידה עבור** $x>e$ **,**

או $f''(x)<0$ **. כיוון שבסעיף ג נדרשת הנגזרת השנייה – נחשב אותה כבר כעת.**

$$f''(x)=k\cdot\frac{\frac{\ell n^2 x}{x}-\frac{2\ell n\, x(\ell n\, x-1)}{x}}{\ell n^4 x}$$

$$f''(x)=k\cdot\frac{\ell n\, x(\ell n\, x-2\ell n\, x+2)}{x\ell n^4 x}$$

$$\boxed{f''(x)=k\cdot\frac{\ell n\, x(2-\ell n\, x)}{x\ell n^4 x}}$$

$$f''(e)=k\cdot\frac{\ell n\, e(2-\ell n\, e)}{e\ell n^4 e}=\frac{k}{e}$$

תשובה: עבור $k<0$ **תהייה לפונקציה** $f(x)$ **ערך מקסימלי.**

(2) נתון כי עבור $x>1$ **ערכי הפונקציה** $f(x)=\frac{kx}{\ell n\, x}\leq -2$ **, כלומר** $(e,-2)$ **שיעורי נקודת המקסימום.**

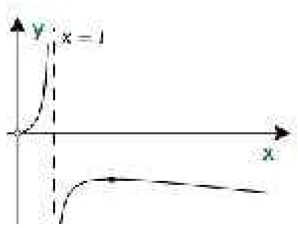
נציב שיעורי הנקודה בתבנית הפונקציה: $-2=\frac{ke}{\ell n\, e}$ **ולכן** $k=-\frac{2}{e}$ **.**

תשובה: $k=-\frac{2}{e}$**.**

(3) הישר $x=1$ **הוא אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה** $f(x)=-\frac{2x}{e\ell n\, x}$ **.**

$$f(0.001)=1.06\cdot 10^{-4}\to 0^+,\ f(0.999)=734\to+\infty,\ \ f(999)=-106\to-\infty$$

תשובה: משמאל סקיצה של גרף הפונקציה.



ג. השיפוע המינימלי מתקבל כאשר פונקצית השיפוע עוברת מירידה לעלייה,

כלומר בנקודת פיתול של הפונקציה ובמעבר מקעירות כלפי מטה $\cap$ לקעירות כלפי מעלה $\cup$.

עבור $k=-\frac{2}{e}$ **מתקבל, על פי סעיף א,** $f''(x)=-\frac{2}{e}\cdot\frac{\ell n\, x(2-\ell n\, x)}{x\ell n^4 x}$ **.**

ולכן $2-\ell n\, x \quad \to \ell n\, x=2 \quad \to x=e^2$

$f''(e)<0, \quad f''(e^3)>0$ **ולכן** $x=e^2$ **מינימום.**

$$f(e^2)=-\frac{2e^2}{e\ell n\, e^2}=-e$$

תשובה: נקודת ההשקה של המשיק ששיפועו מינימלי היא $(e^2,-e)$ **.**