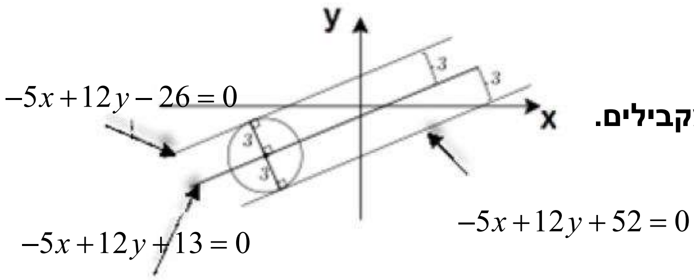
א. כל הנקודות הנמצאות במרחק קבוע מישר, נמצאות על ישר המקביל לישר הנתון.

יש למצוא את המקום הגיאומטרי של נקודות הנמצאות במרחק 3 **יחידות מהישר** $-5x+12y+13=0$**.**



לכן, כל הנקודות שעל המקום הגיאומטרי המבוקש

נמצאות על ישר המקביל לישר הנתון, במרחק של 3 **יחידות.**

נמצא את המקום הגיאומטרי על פי נוסחת מרחק בין ישרים מקבילים.

$$3=\frac{|c-13|}{\sqrt{(-5)^2+12^2}}$$

$$39=|c-13|$$

$$39=c-13 \qquad -39=c-13$$

$$c=52 \qquad c=-26$$

$$\boxed{-5x+12y+52=0} \qquad \boxed{-5x+12y-26=0}$$

ניתן, כמובן, גם בדרך הרגילה: נסמן $\mathrm{P}(s,t)$ **, נקודה על המקום הגיאומטרי.**

$3=\frac{|-5s+12t+13|}{\sqrt{(-5)^2+12^2}}$**, על פי מרחק נקודה מישר, וההמשך מוביל לישרים המקבילים הנדרשים.**

תשובה: הישרים: $-5x+12y+52=0$ **ו-** $-5x+12y-26=0$**.**

ב. כל הנקודות על הישר $-5x+12y+13=0$ **נמצאות באותו מרחק (**3**) מהמקום הגיאומטרי שמצאנו.**

לכן כל אחת מהן היא מרכזו של מעגל המשיק לשני הישרים, ורדיוסו 3**.**

תשובה: הישר הנתון $-5x+12y+13=0$**.**

ג. ראשית הצירים $(0,0)$ **אינה נמצאת על המקום הגיאומטרי שמצאנו בסעיף א,**

כי הישרים: $-5x+12y+52=0$ **ו-** $-5x+12y-26=0$**, אינם עוברים בראשית.**

לכן ציר ה- y **אינו יכול להשיק ב-** $(0,0)$ **לאחד המעגלים שבסעיף ב.**

דרך חלופית: כאשר ציר ה- y **משיק למעגל (מימין או משמאל),**

הרי שערכו המוחלט של שיעור ה- x **של נקודת ההשקה הוא רדיוס המעגל ,**

ושיעור ה- y **של נקודת ההשקה שווה לשיעור-** y **של מרכז המעגל.**

הרדיוס הוא 3**, ונקודת ההשקה המבוקשת היא** $(0,0)$**.**

ולכן שיעורי מרכזי המעגלים האפשריים הם $(3,0)$**, או** $(-3,0)$ **.**

אם נציב אותו בישר הנתון, נקבל סתירה:

$-5\cdot3+12\cdot0+13=-2\neq0$ **, או** $-5\cdot(-3)+12\cdot0+13=28\neq0$**.**

תשובה: ציר ה- y **אינו יכול להשיק ב-** $(0,0)$ **לאחד המעגלים שבסעיף ב.**

נכתב ע"י עפר ילין

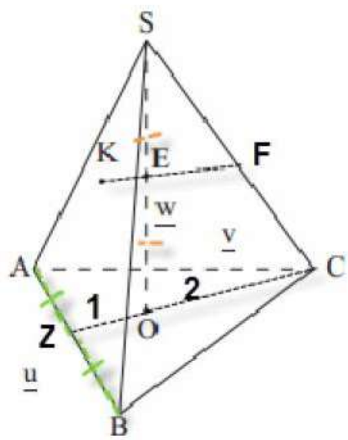
א. $SABC$ **פירמידה ישרה, שבבסיסה** ABC **הוא משולש שווה צלעות.**

לכן הגובה SO **יורד למרכז מעגל חוסם, שהוא במקרה זה גם מפגש תיכונים,**

החותכים זה את זה ביחס $2:1$ **מהקדקוד.**

נמצא את ערכו של t **עבורו הנקודות** K, E **ו-** F **נמצאות על ישר אחד,**

כלומר $\overrightarrow{KE}=\alpha\overrightarrow{KF}$.



$\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{u}}$ $\boxed{\overrightarrow{AC}=\underline{v}}$ $\boxed{\overrightarrow{OS}=\underline{w}}$

$$\overrightarrow{SF}=t\overrightarrow{SC}$$

$$\overrightarrow{SF}=t(\overrightarrow{SO}+\frac{2}{3}\overrightarrow{ZC})$$

$$\overrightarrow{SF}=t(\overrightarrow{SO}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{ZA}+\overrightarrow{AC}))$$

$$\overrightarrow{SF}=t(-\underline{w}+\frac{2}{3}(-\frac{1}{2}\underline{u}+\underline{v}))$$

$$\boxed{\overrightarrow{SF}=-\frac{1}{3}t\underline{u}+\frac{2}{3}t\underline{v}-t\underline{w}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{SK}=\frac{1}{9}\underline{u}-\frac{2}{9}\underline{v}-\frac{2}{3}\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{KE}=\overrightarrow{KS}+\overrightarrow{SE}$$

$$\overrightarrow{KE}=-\frac{1}{9}\underline{u}+\frac{2}{9}\underline{v}+\frac{2}{3}\underline{w}-\frac{1}{2}\underline{w}$$

$$\boxed{\overrightarrow{KE}=-\frac{1}{9}\underline{u}+\frac{2}{9}\underline{v}+\frac{1}{6}\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{KF}=\overrightarrow{KS}+\overrightarrow{SF}$$

$$\overrightarrow{KF}=-\frac{1}{9}\underline{u}+\frac{2}{9}\underline{v}+\frac{2}{3}\underline{w}-\frac{1}{3}t\underline{u}+\frac{2}{3}t\underline{v}-t\underline{w}$$

$$\boxed{\overrightarrow{KF}=(-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}t)\underline{u}+(\frac{2}{9}+\frac{2}{3}t)\underline{v}+(\frac{2}{3}-t)\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{KE}=\alpha\overrightarrow{KF}$$

$$(1)\quad -\frac{1}{9}=\alpha(-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}t)$$

$$(2)\quad \frac{2}{9}=\alpha(\frac{2}{9}+\frac{2}{3}t)\quad /:(-2)\quad \rightarrow -\frac{1}{9}=\alpha(-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}t)$$

$$(3)\quad \frac{1}{6}=\alpha(\frac{2}{3}-t)$$

קיבלנו ששתי המשוואות הראשונות שקולות זו לזו.

$$(3):(1) \quad -\frac{2}{3}=\frac{-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}t}{\frac{2}{3}-t}$$

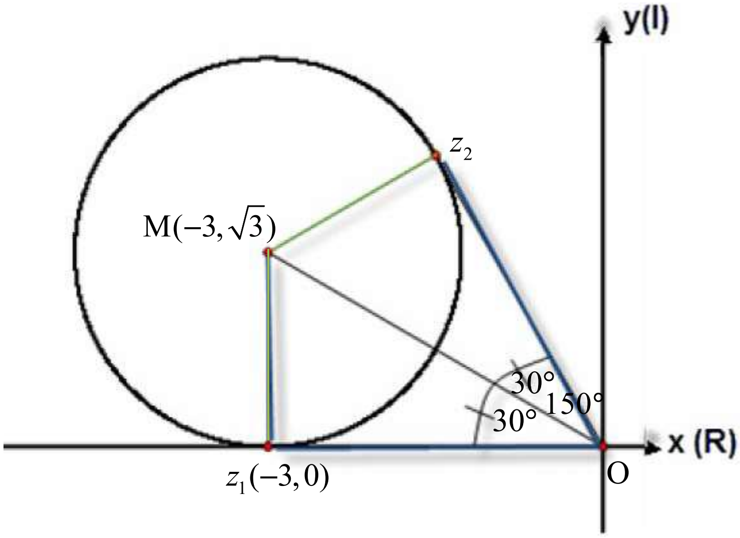
$$-\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-t)=-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}t$$

$$-\frac{4}{9}+\frac{2}{3}t=-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}t$$

$$\boxed{t=\frac{1}{3}}$$

תשובה: $t=\frac{1}{3}$.

א. נסרטט סקיצה של המקום הגיאומטרי של המספרים z המקיימים $\left|z+3-\sqrt{3}\,i\right|=\sqrt{3}$.



נסמן $z=a+bi$

$$\left|z+3-\sqrt{3}\,i\right|=\sqrt{3}$$
$$\left|a+bi+3-\sqrt{3}\,i\right|=\sqrt{3}$$
$$\left|(a+3)+(b-\sqrt{3})i\right|=\sqrt{3}$$
$$(a+3)^2+(b-\sqrt{3})^2=3$$

תשובה: המעגל $(x+3)^2+(y-\sqrt{3})^2=3$,

שמרכזו $(-3,\sqrt{3})$ **ורדיוסו** $\sqrt{3}$.

ב. המקום הגיאומטרי נפגש עם ציר ה- x **בנקודה** z_1,

ולכן שיעורי הנקודה, נקודת השקה, הם: $z_1(-3,0)$

הנקודה $\mathrm{M}(-3,\sqrt{3})$ **היא מרכז המעגל.**

הנקודה המתאימה ל- z_2 **היא נקודת השקה**

של משיק שני היוצא מראשית הצירים, כי $z_1\mathrm{M}z_1\mathrm{O}$ **הוא דלתון,**

ששתי צלעות שלו הם המשיקים השווים זה לזה ושתי צלעות אחרות הן רדיוסי המעגל.

נחשב את גודל הזווית החדה של הדלתון.

האלכסון הראשי בדלתון (MO**) חוצה את זוויות הראש.**

$$\tan\theta_{\mathrm{M}}=\frac{\sqrt{3}}{-3}$$
$$\theta=-30^\circ+180^\circ k$$
$$\theta=150^\circ \quad \leftarrow 2nd\ quadrant$$

ולכן מחצית הזווית החדה של הדלתון, הזווית הצמודה לזו שחישבנו, היא בת 30°.

מכאן שגודל הזווית החדה של הדלתון הוא 60°.

תשובה: 60°.

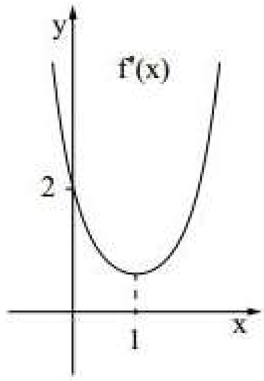
ג. (1) הארגומנט של z_2 **שווה** $\arg(z_2)=\arg(z_1)-60^\circ=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

תשובה: $\arg(z_2)=120^\circ$.

(2) עבור זווית (ארגומנט) שבין 0° **ל-** 360°, **ניתן לומר שכל המספרים שעל המעגל המסורטט,**

הם בעלי ארגומנט שבין 120° **(**z_2**) ל-** 180° **(**z_1**).**

תשובה: המספר שיש לו את הארגומנט הגדול ביותר הוא $z_1(-3,0)$ **(או** $z=-3$**) והארגומנט הוא** 180°.



א. בציור מוצג גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, המוגדרת לכל x .

על פי גרף הנגזרת ניתן ללמוד מספר דברים.

הנגזרת חיובית לכל x ולכן הפונקציה $f(x)$ (המוגדרת לכל x) עולה לכל x.

$f'(0)=2$, כלומר שיפוע המשיק של $f(x)$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא 2.

הנגזרת יורדת עבור $x<1$ ובהתאם $f''(x)<0$ והפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$.

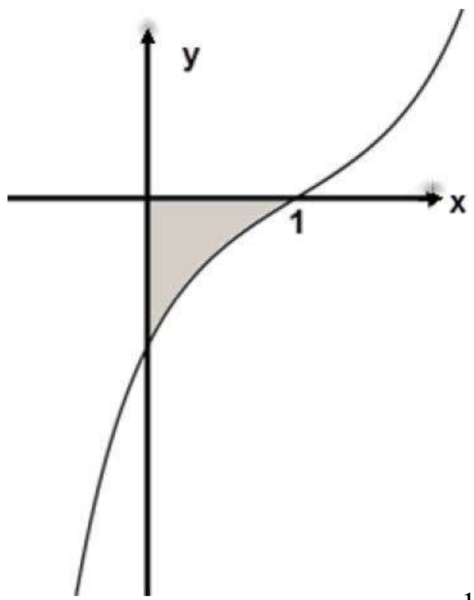
הנגזרת עולה עבור $x>1$ ובהתאם $f''(x)>0$ והפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$.

בהתאם, שיעור ה- x של נקודת הפיתול היחידה של $f(x)$ הוא 1.

תשובה: קעורה כלפי מעלה $\cup$: $x>1$, קעורה כלפי מטה $\cap$: $x<1$.

ב. נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y בחלקו השלילי.

הסקיצה המתאימה משמאל (כולל סימונים עבור סעיף ג):



ג. נתון גם גרף הפונקציה $f(x)=(x-a)e^{0.5x^2-x}$ (a פרמטר).

נמצא את פונקציית הנגזרת ונציב $f'(0)=2$.

$$f'(x)=e^{0.5x^2-x}+(x-a)(x-1)e^{0.5x^2-x}$$
$$f'(x)=e^{0.5x^2-x}(1+(x-a)(x-1))$$
$$2=e^{0.5\cdot0^2-0}(1+(0-a)(0-1))$$
$$2=1+a$$
$$\boxed{a=1}$$
$$\boxed{f(x)=(x-1)e^{0.5x^2-x}}$$

לכן, שיעור ה- x של נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x הוא 1.

נחשב את השטח המבוקש, כאשר נשים לב כי נגזרת מעריך $e^{0.5x^2-x}$ היא $x-1$.

$$S=\int_0^1(0-(x-1)e^{0.5x^2-x})\,dx=\int_0^1(-e^{0.5x^2-x}(x-1))\,dx$$
$$S=-e^{0.5x^2-x}\Big]_0^1$$
$$S=-e^{0.5\cdot1^2-1}-(-e^{0.5\cdot0^2-0})$$
$$S=-e^{-0.5}+e^0$$
$$\boxed{S=1-\frac{1}{\sqrt{e}}}$$

תשובה: $1-\frac{1}{\sqrt{e}}$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\ell og_4\,(x^2+4x+c)$ **, כאשר** c **פרמטר.**

(1) לפונקציה אסימפטוטה אנכית שמשוואתה $x=-2$ **, כלומר** $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+4x+c)=0$ **.**

לכן, $x=-2$ **מאפס את הביטוי** x^2+4x+c **.**

$$(-2)^2+4(-2)+c=0$$

$$\boxed{c=4}$$

תשובה: $c=4$ **.**

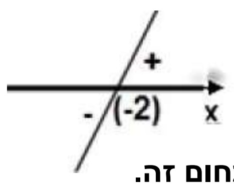
(2) $f(x)=\ell og_4\,(x^2+4x+4)$ **. תחום ההגדרה** $x\neq -2 \leftarrow \quad (x+2)^2>0 \leftarrow \quad x^2+4x+4>0$

תשובה: $x\neq -2$ **.**

(3) נמצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.

$$\boxed{f\,'(x)=\frac{2x+4}{(x^2+4x+4)\ell\,\text{n}\,4}}$$

$$2x+4=0 \quad \rightarrow \cancel{x=-2}$$



הנגזרת אינה מתאפסת בתחום ההגדרה.

גרף סימני הנגזרת הוא של קו ישר, עולה משמאל לימין.

הנגזרת שלילית עבור $x<-2$ **ובהתאם הפונקציה** $f(x)$ **יורדת בתחום זה.**

הנגזרת חיובית עבור $x>-2$ **ובהתאם הפונקציה** $f(x)$ **עולה בתחום זה.**

תשובה: עלייה: $x>-2$ **, ירידה:** $x<-2$ **.**

(4) נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

$$f(0)=\ell og_4\,(0^2+4\cdot 0+4)=\ell og_4\,4=1 \quad \rightarrow \boxed{(0,1)}$$

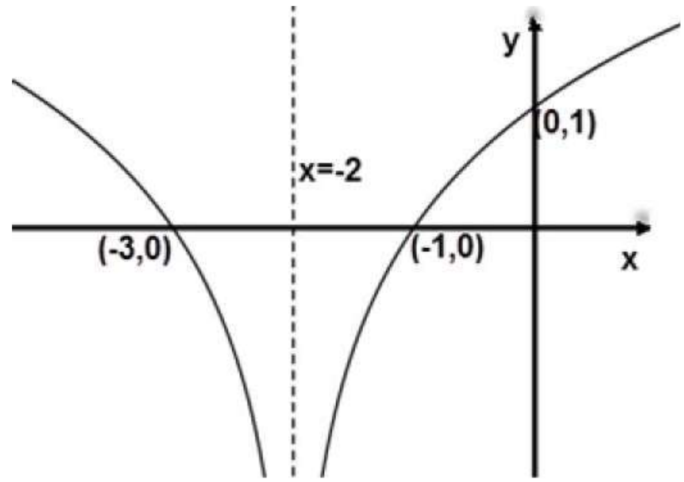
$$0=\ell og_4\,(x^2+4x+4)$$

$$1=x^2+4x+4$$

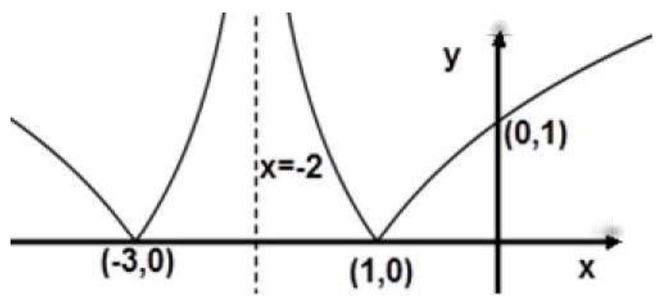
$$x^2+4x+3=0 \quad \rightarrow (x+1)(x+3)=0 \quad \rightarrow \boxed{(-1,0)},\ \boxed{(-3,0)}$$

תשובה: $(0,1)\ ,\ (-3,0),\ (-1,0)$ **.**

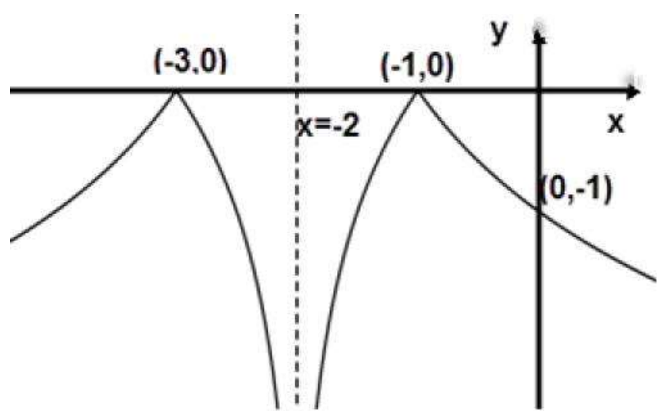
(5) הסקיצה המתאימה.



ב. (1) גרף הפונקציה $h(x)=\left|f(x)\right|$ כולל היפוך של חלקי הגרף שמתחת לציר ה- x של $f(x)$:



ובהתאם גרף הפונקציה $g(x)=-\left|f(x)\right|$ סימטרי לציר ה x של הפונקציה $h(x)$:



(2) על פי הסקיצה של תת-הסעיף הקודם, ציר ה- x הוא הישר האופקי היחיד החותך את $g(x)$ פעמיים.

תשובה: למשוואה $g(x)$ יש שני פתרונות בלבד עבור $k=0$.