א. הנקודה $C(x_C, y_C)$ **נמצאת על הפרבולה** $y^2 = 4x$ **, ברביע הראשון, ולכן שיעוריה** $C(x_C, +\sqrt{4x_C})$.

הקטע AC **מקביל לציר ה-** x **, לכן** $y_A = y_C = +\sqrt{4x_C}$.

הנקודה $A(x_A, y_A)$ **נמצאת על הפרבולה** $y^2 = 3x$ **, ברביע הראשון, ולכן שיעוריה** $A(x_A, +\sqrt{3x_A})$.

מכאן ש: $+\sqrt{3x_A} = +\sqrt{4x_C}$ **ולכן הביטויים שבשורש שווים ונקבל** $\boxed{x_A = \frac{4}{3}x_C}$.

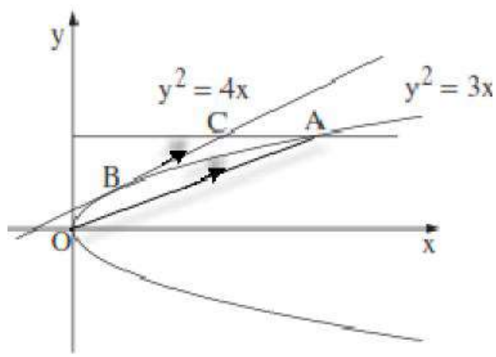
תשובה: $x_A = \frac{4}{3}x_C$.

ב. נביע את שיפוע המיתר OA **, באמצעות** x_C **, עבור** $A(\frac{4}{3}x_C, +\sqrt{4x_C})$:

$$m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{\sqrt{4x_C} - 0}{\frac{4}{3}x_C - 0}$$

$$m_{OA} = \frac{2\sqrt{x_C}}{\frac{4}{3}x_C}$$

$$\boxed{m_{OA} = \frac{1.5}{\sqrt{x_C}}} \leftarrow \frac{\sqrt{x_C}}{x_C} = \frac{1}{\sqrt{x_C}} \leftarrow x_C > 0$$



תשובה: $m_{OA} = \frac{1.5}{\sqrt{x_C}}$.

ג. נתון כי שטח המשולש BCA **, הוא** 0.5625 **.**

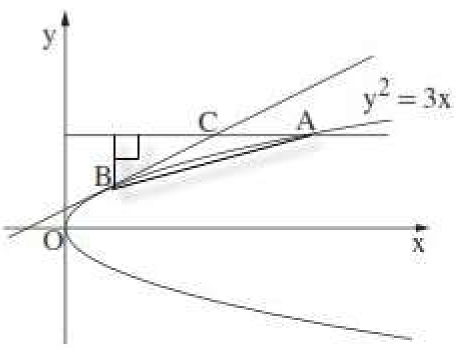
הגובה לצלע AC **הוא גובה חיצוני, לכן:** $0.5625=\frac{(x_A-x_C)(y_C-y_B)}{2}$ **.**

המשיק לפרבולה $y^2=3x$ **בנקודה** B **מקביל למיתר** OA **, לכן שיפוע המשיק הוא** $\frac{1.5}{\sqrt{x_C}}$ **.**

משוואת משיק לפרבולה, בנקודה שעל הפרבולה, היא: $yy_0=P(x+x_0)$ **ולכן השיפוע הוא** $m=\frac{P}{y_0}$.

בהתאם, השיפוע בנקודה B **שעל הפרבולה** $y^2=3x \leftarrow P=1.5$ **, הוא** $m=\frac{1.5}{y_B}$ **,**

ולכן $\frac{1.5}{\sqrt{x_C}}=\frac{1.5}{y_B}$ **ו-** $y_B=\sqrt{x_C}$.



נציב בנוסחת השטח:

$$1.125=(\frac{4}{3}x_C-x_C)(2\sqrt{x_C}-\sqrt{x_C})$$

$$1.125=\frac{1}{3}x_C\cdot\sqrt{x_C}$$

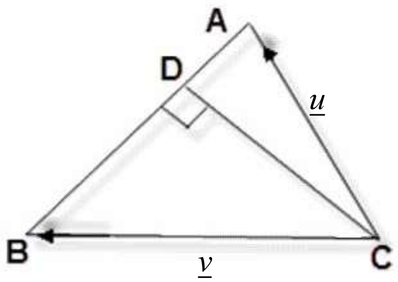
$$\frac{27}{8}=x_C^{\frac{3}{2}}$$

$$x_C=(\frac{27}{8})^{\frac{2}{3}}=(\sqrt[3]{\frac{27}{8}})^2=(\frac{3}{2})^2$$

$$x_C=2.25 \quad\rightarrow y_C=2\sqrt{2.25}=3 \quad\rightarrow \boxed{C(2.25,3)}$$

תשובה: $C(2.25,3)$ **.**

א. אין מידע על ΔABC **כך שנסרטט אותו כחד-זווית, כאשר הגובה בפנים, מבלי שהדבר ישפיע דרך החישוב.**



$\boxed{\overrightarrow{CA}=\underline{u}}$ $\boxed{|\underline{u}|=1}$ $\boxed{\underline{u}^2=1}$

$\boxed{\overrightarrow{CB}=\underline{v}}$ $\boxed{|\underline{v}|=2}$ $\boxed{\underline{v}^2=4}$

$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AD}=t(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})$

$\boxed{\overrightarrow{AD}=-t\underline{u}+t\underline{v}}$

$\cos\sphericalangle ACB=\frac{3}{4}$

$\cos\sphericalangle ACB=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}$

$\frac{3}{4}=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{1\cdot 2}$

$\boxed{\underline{u}\cdot\underline{v}=1.5}$

$\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{AB}\quad\rightarrow\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{CD}=\underline{u}-t\underline{u}+t\underline{v}$

$\boxed{\overrightarrow{CD}=(1-t)\underline{u}+t\underline{v}}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

$\boxed{\overrightarrow{AB}=-\underline{u}+\underline{v}}$

$\left[(1-t)\underline{u}+t\underline{v}\right]\cdot(-\underline{u}+\underline{v})=0$

$-(1-t)\underline{u}^2+(1-t)\underline{u}\cdot\underline{v}-t\underline{u}\cdot\underline{v}+t\underline{v}^2=0$

$-(1-t)+1.5(1-t)-1.5t+4t=0$

$-1+t+1.5-1.5t+2.5t=0$

$0.5+2t=0$

$\boxed{t=-\frac{1}{4}}$

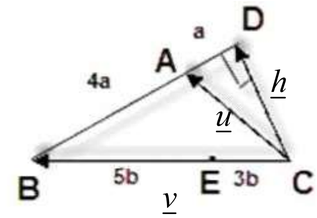
תשובה: $t=-\frac{1}{4}$.

ב. $t=-\frac{1}{4}$, **כלומר הנקודה** D **, נמצאת על המשך** AB **, מהצד של** A **, כך ש-** $DA:AB=1:4$ **.**

המשמעות היא שהמשולש קהה זווית ($\sphericalangle CAB>90^\circ$ **), כאשר הגובה** CD **הוא חיצוני.**

נשרטט את הציור המתאים ונביא לידי ביטוי גם את אורכי הצלעות הנתונות,

(לרבות סימון הנקודה E **(** $CE:BE=3:5$ **), והגובה** $\overrightarrow{CD}=\underline{h}$ **, עבור סעיף ג) .**



ג. נביע את $\overrightarrow{AE}$ **באמצעות** $\underline{u}$ **ו-** $\underline{h}$ **בלבד, כאשר תחילה נביע את** $\underline{v}=\overrightarrow{CB}$ **באמצעות** $\underline{u}$ **ו-** $\underline{h}$ **בלבד.**

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$$
$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}+5\overrightarrow{DA}$$
$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}+5(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA})$$
$$\overrightarrow{CB}=\underline{h}+5(-\underline{h}+\underline{u})$$
$$\boxed{\overrightarrow{CB}=5\underline{u}-4\underline{h}}$$
$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}$$
$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\frac{3}{8}\overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{AE}=-\underline{u}+\frac{3}{8}(5\underline{u}-4\underline{h})$$
$$\boxed{\overrightarrow{AE}=\frac{7}{8}\underline{u}-\frac{3}{2}\underline{h}}$$

תשובה: $\overrightarrow{AE}=\frac{7}{8}\underline{u}-\frac{3}{2}\underline{h}$.

א. נפתור את המשוואה $(\frac{2z+1}{z-1})^4=1$ **.**

נזכיר ונוכיח כי ארבעת הפתרונות של המשוואה $t^4=1=1cis\,0$ **,**

מהווים סדרה הנדסית שמנתה $cis\,(90°)=i$ **.**

$$\frac{t_{k+1}}{t_k}=\frac{\sqrt[4]{1}\;cis(\frac{0°}{4}+cis(\frac{360°(k+1)}{4})}{\sqrt[4]{1}\;cis(\frac{0°}{4}+cis(\frac{360°k}{4})}$$

$$\frac{t_{k+1}}{t_k}=\frac{cis(90°k+90°)}{cis(90°k)}=cis\;90°=i$$

לכן, כיוון שאחד מהפתרונות הוא המספר הממשי 1**, הרי ששאר הפתרונות הם:** $i,-1,-i$ **.**

נפתור את המשוואה $(\frac{2z+1}{z-1})^4=1$**, עבור כל אחד מהפתרונות שהתקבלו:**

$$\frac{2z+1}{z-1}=1$$
$$2z+1=z-1$$
$$\boxed{z_1=-2}$$

$$\frac{2z+1}{z-1}=i$$
$$2z+1=zi-i$$
$$2z-zi=-1-i$$
$$z(2-i)=-1-i$$
$$z=\frac{-1-i}{2-i}$$
$$z=\frac{(-1-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$
$$z=\frac{-2-i-2i+1}{5}$$
$$\boxed{z_2=-0.2-0.6i}$$

$$\frac{2z+1}{z-1}=-1$$
$$2z+1=-z+1$$
$$3z=0$$
$$\boxed{z_3=0}$$

$$\frac{2z+1}{z-1}=-i$$
$$2z+1=-zi+i$$
$$2z+zi=-1+i$$
$$z(2+i)=-1+i$$
$$z=\frac{-1+i}{2+i}$$
$$z=\frac{(-1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$
$$z=\frac{-2+i+2i+1}{5}$$
$$\boxed{z_4=-0.2+0.6i}$$

תשובה: הפתרונות הם: $z_4=-0.2+0.6i,\quad z_3=0,\quad z_2=-0.2-0.6i,\quad z_1=-2$ **.**

ב. נחשב את הארגומנט של כל אחד משלושת הפתרונות, השונים מ- 0**, תוך תשומת לב לרביע המתאים.**

$$z_1=-2$$
$$z_1=2\;cis180°$$
$$\theta=180°$$
$$\boxed{107°<\arg(z_1)<253°\quad o.k.}$$

$$z_2=-0.2-0.6i$$
$$\tan\theta_{Z_2}=\frac{-0.6}{-0.2}=3$$
$$\theta_{Z_2}=71.565°+180°k$$
$$\theta_{Z_2}=251.565°\quad\leftarrow 3rd\;quadrant$$
$$\boxed{107°<\arg(z_2)<253°\quad o.k.}$$

$$z_4=-0.2+0.6i$$
$$\tan\theta_{Z_4}=\frac{0.6}{-0.2}=-3$$
$$\theta_{Z_4}=-71.565°+180°k$$
$$\theta_{Z_4}=108.43°\quad\leftarrow 2nd\;quadrant$$
$$\boxed{107°<\arg(z_4)<253°\quad o.k.}$$

תשובה: כן, שלושה מהפתרונות נמצאים על המקום הגיאומטרי $107°<\arg(w)<253°$**.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{-2(x+3)}{\sqrt{e^{ax}}}$ **(** a **הוא פרמטר).**

(1) הביטוי שבתוך השורש חיובי לכל x**, לכן הפונקציה מוגדרת לכל** x**.**

תשובה: $f(x)$ **מוגדרת לכל** x.

(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y**, מתקיים** $x=0$**.**

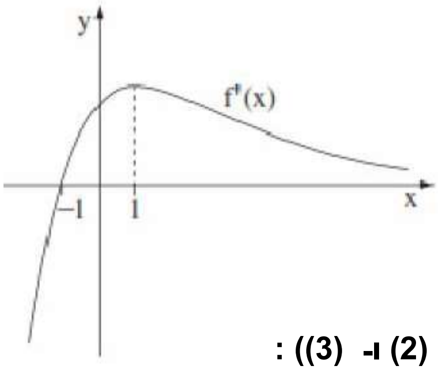
$$f(0)=\frac{-2(0+3)}{\sqrt{e^{a\cdot 0}}}=\frac{-6}{1}=-6 \quad\to \boxed{(0,-6)}$$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x**, מתקיים** $y=0$**.**

$$0=\frac{-2(x+3)}{\sqrt{e^{ax}}}$$

$$0=x+3 \quad\to x=-3 \quad\to \boxed{(-3,0)}$$

תשובה: $(0,-6)$ **,** $(-3,0)$**.**



ב. (1) על פי גרף הנגזרת ניתן ללמוד מספר דברים (גם עבור תת סעיפים (2) ו- (3)) :

הנגזרת שלילית עבור $x<-1$ **ולכן הפונקציה** $f(x)$ **(המוגדרת לכל** x **) יורדת בתחום** $x<-1$**.**

הנגזרת חיובית עבור $x>-1$ **ולכן הפונקציה** $f(x)$ **(המוגדרת לכל** x **) עולה בתחום** $x>-1$ **.**

מכאן ש- $x=-1$ **הוא שיעור ה-** x **של נקודת מינימום, נקודת הקיצון היחידה של** $f(x)$**.**

כמו כן $f'(-1)=0$ **, מה שיאפשר לנו למצוא את ערך הפרמטר** a**.**

הנגזרת עולה עבור $x<1$ **ובהתאם בתחום הזה** $f''(x)>0$ **והפונקציה** $f(x)$ **קעורה כלפי מעלה** $\cup$**.**

הנגזרת יורדת עבור $x>1$ **ובהתאם בתחום הזה** $f''(x)<0$ **והפונקציה** $f(x)$ **קעורה כלפי מטה** $\cap$**.**

בהתאם, שיעור ה- x **של נקודת הפיתול היחידה של** $f(x)$ **הוא** 1**.**

(הערה - $f''(x)<0$ **,** **ללא שוויון, למרות של-** $f'(x)$ **יש נקודת פיתול מימין ל-** $x=1$ **.**

כיוון ששיפוע המשיק של $f'(x)$ **אינו יכול להיות אפס בנקודת פיתול כזו,**

כאשר גרף הנגזרת עובר בירידה מקעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה).

נחזור למצוא את ערך הפרמטר a**, על פי הרמז** $f'(-1)=0$ **.**

$$f'(x)=-2\cdot\frac{\sqrt{e^{ax}}-\dfrac{a\cdot e^{ax}(x+3)}{2\sqrt{e^{ax}}}}{e^{ax}}$$

$$f'(x)=-2\cdot\frac{\sqrt{e^{ax}}-0.5a(x+3)\sqrt{e^{ax}}}{e^{ax}} \quad \leftarrow \quad \frac{\sqrt{e^{ax}}}{e^{ax}}=\frac{1}{\sqrt{e^{ax}}}\leftarrow e^{ax}>0$$

$$f'(x)=-2\cdot\frac{1-0.5a(x+3)}{\sqrt{e^{ax}}}$$

$$1-0.5a(-1+3)=0 \quad \leftarrow f'(-1)=0$$

$$1-a=0$$

$$\boxed{a=1}$$

מכאן ש- $a=1$ **ו-** $f(x)=\dfrac{-2(x+3)}{\sqrt{e^{x}}}$ **.**

שיעור ה- y **של נקודת המינימום הוא** $f(-1)=\dfrac{-2(-1+3)}{\sqrt{e^{-1}}}=\dfrac{-4}{e^{-0.5}}=-4\sqrt{e}\approx-6.59$ **.**

תשובה: $(-1,-4\sqrt{e})$ **, מינימום.**

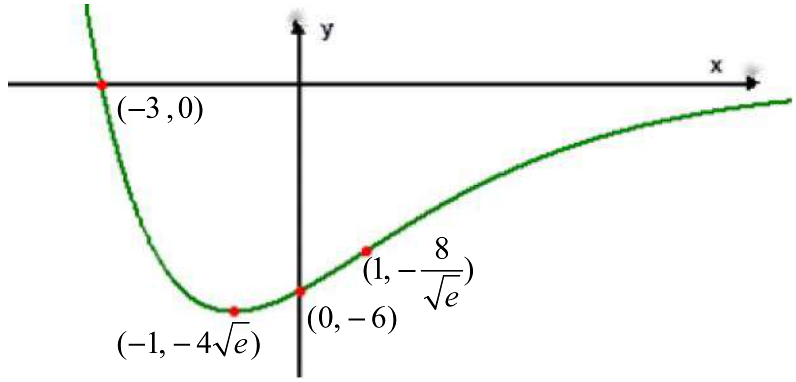
(2) כפי שהוסבר בתת סעיף (1) שיעור ה- x **של נקודת הפיתול היחידה של** $f(x)$ **הוא** 1.

שיעור ה- y **של נקודת הפיתול הוא** $f(1)=\dfrac{-2(1+3)}{\sqrt{e^{1}}}=y=\dfrac{-8}{\sqrt{e}}\approx-4.85$ **.**

תשובה: שיעורי נקודת הפיתול הם $(1,-\dfrac{8}{\sqrt{e}})$ **.**

(3) תשובה: קעורה כלפי מעלה $\cup$: $x<1$ **, קעורה כלפי מטה** $\cap$: $x>1$ **.**

ג. נסרטט סקיצה מתאימה.



א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{3-9\ell n\,(3x+1)}{3x+1}$.

הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית הוא חיובי עבור $3x+1>0$ **, כלומר** $x>-\dfrac{1}{3}$ **,**

ובתחום זה גם המכנה לא יתאפס.

תשובה: $x>-\dfrac{1}{3}$.

ב. (1) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **, מתקיים** $y=0$.

$$0=\frac{3-9\ell n\,(3x+1)}{3x+1}$$
$$0=3-9\ell n\,(3x+1)$$
$$\ell n\,(3x+1)=\frac{1}{3}$$
$$3x+1=\sqrt[3]{e}$$
$$x=\frac{\sqrt[3]{e}-1}{3}\approx 0.132 \quad \rightarrow \boxed{(\frac{\sqrt[3]{e}-1}{3},0)}$$

תשובה: $(\dfrac{\sqrt[3]{e}-1}{3},0)$.

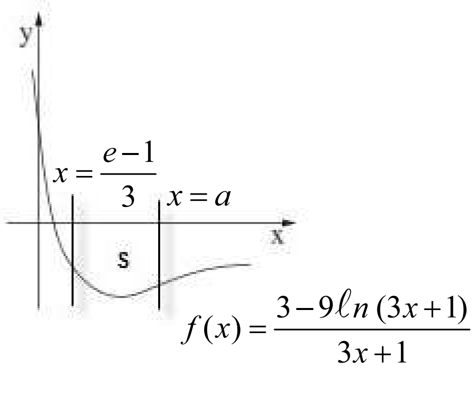
(2) $x=\dfrac{e-1}{3}\approx 0.573$ **, גדול משיעור ה-** x **של נקודת החיתוך עם ציר ה-** x **:** $\dfrac{\sqrt[3]{e}-1}{3}\approx 0.132$.

לכן שני הישרים נמצאים מימין לנקודת החיתוך עם ציר ה- x .

גודל השטח, המסומן בציור באות S **, הוא** 3.5 .

את האינטגרל הנדרש ניתן למצוא בעזרת הנגזרת של $y=\ell n^2(3x+1)$ **,**

או בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית.



דרך אחת:

$$y=\ell n^2(3x+1)$$
$$y'=\frac{2\ell n(3x+1)\cdot 3}{3x+1}=\frac{6\ell n(3x+1)}{3x+1}$$
$$\int\frac{\ell n(3x+1)}{3x+1}dx=\frac{1}{6}\ell n^2(3x+1)+c$$

דרך שנייה:

$$\int\frac{\ell n(3x+1)}{3x+1}dx=\int\frac{1}{3}\ell n(3x+1)\cdot\frac{3}{3x+1}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{\ell n^2(3x+1)}{2}+c=\frac{1}{6}\cdot\ell n^2(3x+1)+c\ .$$

בחישוב השטח, נשים לב כי הביטויים שמקבלת פונקציית ה ℓn חיוביים,

ולכן לא נדרש לרשום ערך מוחלט.

כאשר נמצא את ערכו של a נוודא ש- $a > \frac{e-1}{3}$.

$$S = \int_{\frac{e-1}{3}}^{a} \left(0 - \frac{3 - 9\ell n\,(3x+1)}{3x+1}\right) dx$$

$$S = \int_{\frac{e-1}{3}}^{a} \left(-\frac{3}{3x+1} + 9 \cdot \frac{\ell n\,(3x+1)}{3x+1}\right) dx$$

$$S = -\frac{3\ell n\,(3x+1)}{3} + 9 \cdot \frac{1}{6} \cdot \ell n^2 (3x+1) \Big]_{\frac{e-1}{3}}^{a} =$$

$$x = a: \quad -\ell n\,(3a+1) + 1.5\ell n^2 (3a+1)$$

$$x = \frac{e-1}{3}: \quad -\ell n\,(3 \cdot \frac{e-1}{3} + 1) + 1.5\ell n^2 (3 \cdot \frac{e-1}{3} + 1 + 1) = -\ell n\, e + 1.5\ell n^2\, e = 0.5$$

$$\boxed{S = 1.5\ell n^2 (3a+1) - \ell n\,(3a+1) - 0.5}$$

$$1.5\ell n^2 (3a+1) - \ell n\,(3a+1) - 0.5 = 3.5$$

$$1.5\ell n^2 (3a+1) - \ell n\,(3a+1) - 4 = 0$$

$$(\ell n\,(3a+1))_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{3}$$

$$\ell n\,(3a+1) = 2 \quad \to 3a+1 = e^2 \quad \to \boxed{a = \frac{e^2-1}{3}} > \frac{e-1}{3} \quad \to o.k.$$

$$\ell n\,(3a+1) = -\frac{4}{3} \quad \to 3a+1 = e^{-\frac{4}{3}} \quad \to a = \frac{e^{-\frac{4}{3}}-1}{3} < \frac{e-1}{3} \quad \to false$$

תשובה: $a = \frac{e^2-1}{3}$.

ג. נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד $x = \frac{e^{\frac{4}{3}}-1}{3} \approx 0.931$, כפי שניתן לראות בציור.

בתחום $-\frac{1}{3} < x < \frac{e^{\frac{4}{3}}-1}{3}$ הפונקציה יורדת,

ועל פי הציור בתחום זה אין לה נקודת פיתול, לכן $f'(x) < 0$ בתחום זה.

בתחום $x > \frac{\sqrt[3]{e}-1}{3}$ הפונקציה שלילית. שני התנאים מתקיימים יחדיו בתחום $\frac{\sqrt[3]{e}-1}{3} < x < \frac{e^{\frac{4}{3}}-1}{3}$.

תשובה: $\frac{\sqrt[3]{e}-1}{3} < x < \frac{e^{\frac{4}{3}}-1}{3}$.