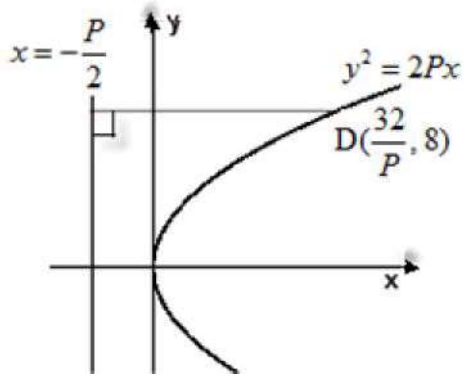
א. הנקודה D נמצאת על הפרבולה $y^2=2Px$, $(P>0)$, ברביע הראשון.

מרחקה מציר ה- x הוא 8, לכן $y_D=8$.

נציב $y_D=8$ במשוואת הפרבולה ונקבל: $8^2=2Px$,

ומכאן ש- $x_D=\frac{32}{P}$ ובהתאם שיעורי D הם $D(\frac{32}{P},8)$.



מרחק הנקודה מהמדריך $x=-\frac{P}{2}$, הוא כהפרשי שיעורי ה- x ,

והוא : $\frac{32}{P}-(-\frac{P}{2})=\frac{32}{P}+\frac{P}{2}$.

תשובה: מרחק הנקודה D מהמדריך של הפרבולה הוא $\frac{32}{P}+\frac{P}{2}$.

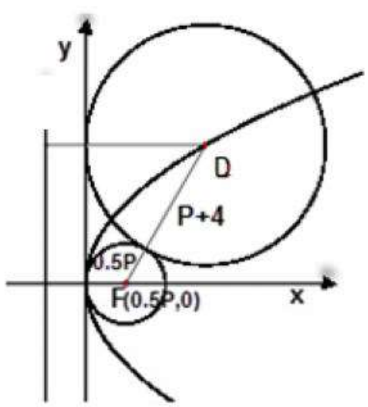
ב. שני המעגלים משיקים מבחוץ, ולכן אורך קטע המרכזים שווה לסכום הרדיוסים.

אורך הרדיוס של המעגל, שמרכזו בנקודה D, נתון והוא $P+4$.

מוקד הפרבולה הוא $F(\frac{P}{2},0)$, וכיוון שהמעגל השני משיק לציר ה- y הרי שרדיוסו הוא $\frac{P}{2}$.

אורכו של קטע המרכזים הוא מרחק הנקודה D מהמוקד,

ששווה למרחקה מהמדריך (על פי תכונות הפרבולה)



ולכן אורכו של קטע המרכזים, על פי סעיף א, הוא $\frac{32}{P}+\frac{P}{2}$.

המשוואה המתאימה היא $\frac{32}{P}+\frac{P}{2}=P+4+\frac{P}{2}$.

נפתור את המשוואה:

$$\frac{32}{P}+\frac{P}{2}=P+4+\frac{P}{2}$$

$$\frac{32}{P}=P+4$$

$$P^2+4P-32=0$$

$$P=-8,\quad P=4$$

נתון כי $P>0$ ובהתאם $P=4$ ומשוואת הפרבולה היא $y^2=8x$.

תשובה: $y^2=8x$.

ג. הנקודה K נמצאת על הפרבולה $y^2 = 8x$, ובהתאם שיעוריה $K(\frac{k^2}{8}, k)$.

משוואת משיק לפרבולה היא $yy_0 = P(x + x_0)$.

ולכן המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $y = 0$ ולכן $x = -x_0$.

מכאן ששיעורי הנקודה T הם $T(-\frac{k^2}{8}, 0)$.

$x_S - x_T = 16$ ולכן $S(-\frac{k^2}{8} + 16, 0)$ או $S(\frac{-k^2 + 128}{8}, 0)$.

שיפוע המשיק לפרבולה הוא $\frac{P}{y_0} = \frac{4}{k}$ ולכן שיפוע האנך (הנורמל) הוא $-\frac{k}{4}$.

המשוואה המתאימה היא :

$$m_{KS} = \frac{y_K - y_S}{x_K - x_S}$$

$$-\frac{k}{4} = \frac{k - 0}{\frac{k^2}{8} - (\frac{-k^2 + 128}{8})} \quad / : k > 0$$

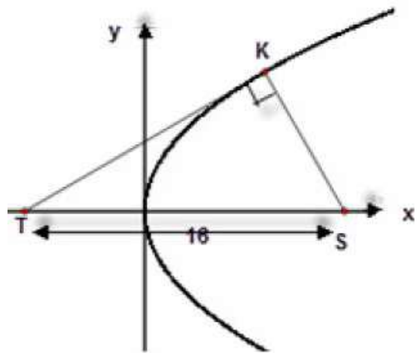
$$-\frac{1}{4} = \frac{8}{2k^2 - 128}$$

$$2k^2 - 128 = -32$$

$$2k^2 = 96$$

$$k^2 = 48 \quad \rightarrow x_K = \frac{k^2}{8} = \frac{48}{8} = 6$$

$$y_K = k = \pm\sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$$



תשובה: שיעורי הנקודה K הם $(6, 4\sqrt{3})$ או $(6, -4\sqrt{3})$.

א. (1) נתון ישר ℓ **שמשוואתו** $\underline{x}=(1,2,-4)+t(1,-2,2)$ **המאונך למישור** π **ולכן מהווה את הנורמל שלו.**

בהתאם משוואת מישור π **היא** $x-2y+2z+d=0$ **.**

מישור π **עובר בנקודה** $A(8,0,0)$ **, הנמצאת על הקרן החיובית של ציר ה-** x **במרחק** 8 **יחידות מהראשית,**

ולכן נציב את שיעוריה במשוואת המישור: $8-2\cdot 0+2\cdot 0+d=0$ **ונקבל** $d=-8$ **,**

ומשוואת המישור היא $\pi: x-2y+2z-8=0$ **.**

הנקודה B **נמצאת על המישור ועל ציר ה-** y **, ולכן מתקיים** $x_B=z_B=0$ **, ושיעוריה הם** $B(0,-4,0)$ **.**

הנקודה C **נמצאת על המישור ועל ציר ה-** z **, ולכן מתקיים** $x_C=y_C=0$ **, ושיעוריה הם** $C(0,0,4)$ **.**

נמצא את אורכי ששת המקצועות של הפירמידה OABC **.**

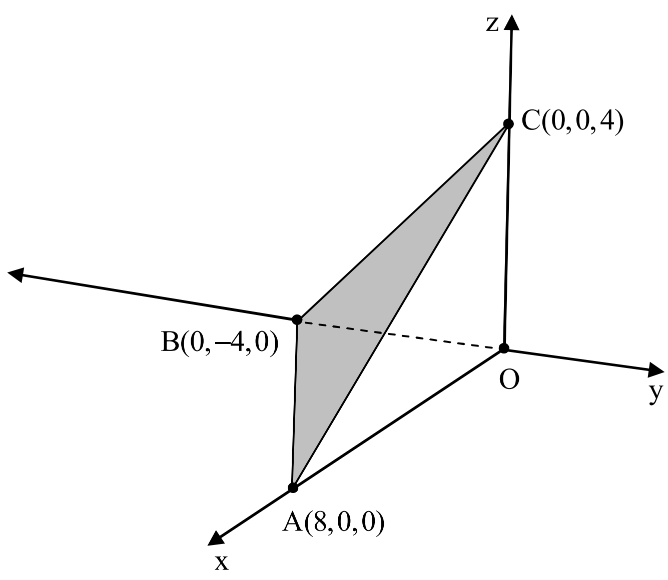
$$OA=8\ ,\ OB=4\ ,\ OC=4\ ,\ AB=\sqrt{(0-8)^2+(4-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{80}\ ,$$

$$AC=\sqrt{(0-8)^2+(0-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{80}\ ,\ BC=\sqrt{(0-8)^2+(0-4)^2+(4-0)^2}=\sqrt{32}\ .$$

תשובה: $OA=8\ ,\ OB=4\ ,\ OC=4\ ,\ AB=\sqrt{80}\ ,\ AC=\sqrt{80}\ ,\ BC=\sqrt{32}$ **.**

(2) לא קיים קודקוד בפירמידה OABC **, ממנו יוצאים שלושה מקצועות שווים ולכן הפירמידה אינה ישרה.**

תשובה: הפירמידה OABC **אינה ישרה.**



ב. מישור הפאה OAC **נפרש על ידי ציר ה-** x **וציר ה-** z **ובהתאם זהו מישור** $[x,z]$**, שמשוואתו** $y=0$ **.**

הנקודה D **נמצאת על המקצוע** AC**, ולכן גם היא במישור** $[x,z]$ **וכן גם הישר** OD**.**

כיוון ש- OD **חוצה זווית** OAC**, הרי ש-** D **אינה מתלכדת עם הנקודה** C**, אלא נמצאת בין** A **ל-** C**.**

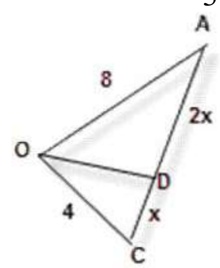
הנקודה $\mathrm{B}(0,-4,0)$ **, שעל ציר ה-** y**, אינה על מישור הפאה** OAC**, והישר** BC **חותך את הפאה בנקודה** C,

ולכן המצב ההדדי בינו לישר OD**, המוכל בפאה, הוא של הצטלבות.**

<u>דרך פתרון חלופית:</u>

על פי משפט חוצה זווית במשולש OAC **מתקיים:** $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DC}}=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OC}}=\frac{8}{4}=\frac{2}{1}$ **.**

על פי חלוקת קטע ביחס נתון מתקיים: $\mathrm{D}(\frac{8}{3},0,\frac{8}{3})=\mathrm{D}(\frac{1\cdot8+2\cdot0}{3},\frac{1\cdot0+2\cdot0}{3},\frac{2\cdot4+1\cdot0}{3})$,



ומשוואת הישר OD **היא** $\underline{x}=s(1,0,1)$ **.**

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\underline{\mathrm{C}}-\underline{\mathrm{B}}=\underline{x}=(0,4,4)$ **ומשוואת הישר** BC **היא** $\underline{x}=(0,-4,0)+q(0,1,1)$ **.**

קל לראות שהישרים אינם מקבילים, או מתלכדים.

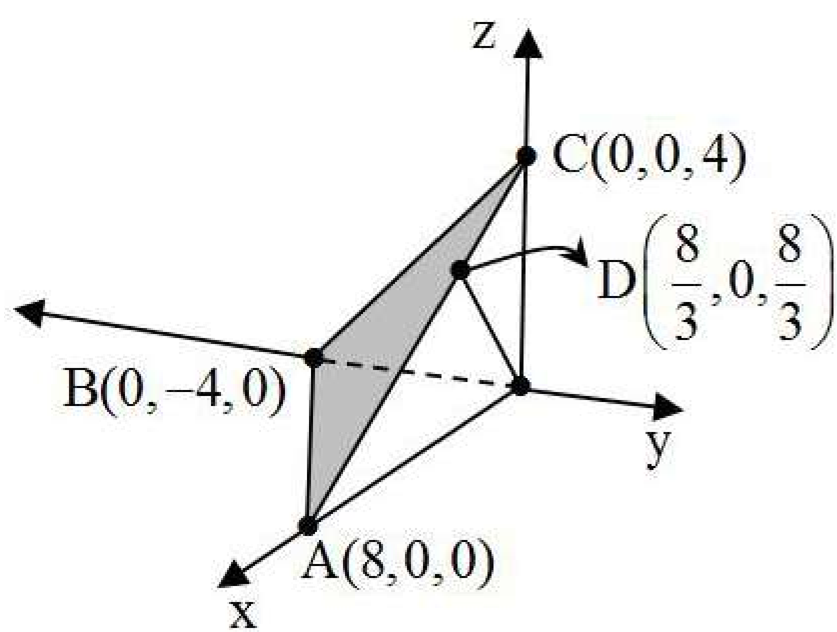
נקודה טיפוסית על BC **היא:** $(0,-4+q,q)$ **ועל** OD $(s,0,s)$ **.**

נקבל שלוש משוואות: (1) $s=0$ **(2)** $0=-4+q \quad \to q=4$ **(3)** $s=q$ **בסתירה לשתי הקודמות.**

ניתן גם להסביר בדרך הבאה: נקודות C **,** B **ו-** O **נמצאות במישור** $[y,z]$**.**

אם OD **מקביל או נחתך עם** BC**, אז גם נקודה** D **צריכה להיות במישור זה, אולם זה לא נכון כי** $x_{\mathrm{D}}\neq0$ **.**

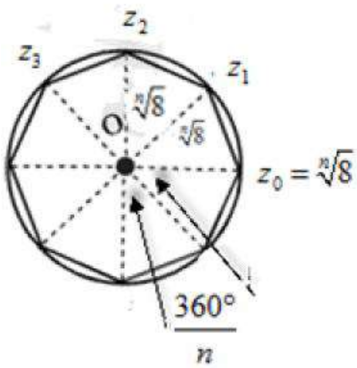
תשובה: הישר OD **והישר** BC **מצטלבים.**



א. נתונה המשוואה $z^n = 8$ **, כאשר** $n > 2$.

פתרונות המשוואה $z^n = 8\,cis\,0$ **הם:** $z_k = \sqrt[n]{8}\,cis(\frac{360°k}{n})$.

נראה שפתרונות המשוואה מהווים סדרה הנדסית שמנתה $\frac{360°}{n}$.



$$\frac{z_{k+1}}{z_k} = \frac{\sqrt[n]{8}\,cis(\frac{360°(k+1)}{n})}{\sqrt[n]{8}\,cis(\frac{360°k}{n})}$$

$$\frac{z_{k+1}}{z_k} = cis(\frac{360°k + 360°}{n} - \frac{360°k}{n})$$

$$\boxed{\frac{z_{k+1}}{z_k} = cis\frac{360°}{n}}$$

$z_0 = \sqrt[n]{8}$ **נמצא על הקרן החיובית של ציר ה-** x **,**

כאשר הארגומנט של כל פתרון נוסף גדול מזה של קודמו ב- $\frac{360°}{n}$.

מתקבלים n **משולשים שווי שוקיים, שאורך כל שוק שלהם היא** $\sqrt[n]{8}$**, החופפים על פי צלע זווית צלע,**

ולכן מתקבל מצולע משוכלל בעל n **צלעות.**

תשובה: הוּכַח.

ב. $z_0 = \sqrt[n]{8}$ **ממשי וחיובי. בהתאם:** $z_1 = \sqrt[n]{8}\,cis(\frac{360°}{n})$ **,** $z_2 = \sqrt[n]{8}\,cis(\frac{720°}{n})$ **,** $z_3 = \sqrt[n]{8}\,cis(\frac{1080°}{n})$.

נתון: $z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot = -\sqrt{8}\,i$.

$$\sqrt[n]{8} \cdot \sqrt[n]{8}\,cis(\frac{360°}{n}) \cdot \sqrt[n]{8}\,cis(\frac{720°}{n}) \cdot \sqrt[n]{8}\,cis(\frac{1080°}{n}) = -\sqrt{8}\,i$$

$$(\sqrt[n]{8})^4\,cis(\frac{360°}{n} + \frac{720°}{n} + \frac{1080°}{n}) = \sqrt{8} \cdot (-i)$$

$$8^{\frac{4}{n}}\,cis(\frac{2160°}{n}) = \sqrt{8}\,cis(270°)$$

$$8^{\frac{4}{n}} = 8^{\frac{1}{2}} \quad \to \frac{4}{n} = \frac{1}{2} \quad \to n = 8$$

$$cis(\frac{2160°}{8}) \stackrel{?}{=} cis270°$$

$$cis(270°) = cis270° \quad o.k.$$

תשובה: $n = 8$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=a\cdot x\cdot e^{\frac{-x^2}{8}}$ **(** $a>0$ **הוא פרמטר).**

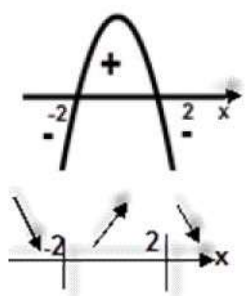
נוכיח כי הפונקציה $f(x)$ **היא פונקציה אי-זוגית (הסימטרית לראשית הצירים).**

$$f(-x)=a\cdot(-x)\cdot e^{\frac{-(-x)^2}{8}}$$
$$f(-x)=-a\cdot x\cdot e^{\frac{-x^2}{8}}$$
$$f(-x)=-f(x)\quad o.k.$$

תשובה: הוּכַח.

ב. (1) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגן.

$$f'(x)=a\cdot[\ e^{\frac{-x^2}{8}}+x\cdot(-\frac{2x}{8})\cdot e^{\frac{-x^2}{8}}\ ]$$
$$f'(x)=ae^{\frac{-x^2}{8}}\cdot(1-\frac{1}{4}x^2)$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{a}{4}e^{\frac{-x^2}{8}}\cdot(4-x^2)}$$
$$4-x^2=0$$
$$x=2\quad\to f(2)=a\cdot 2\cdot e^{\frac{-2^2}{8}}=2ae^{\frac{-1}{2}}\quad\to(2,\frac{2a}{\sqrt{e}})$$
$$x=-2\quad\to(-2,\frac{-2a}{\sqrt{e}})$$



(שיעורי הנקודה $(-2,\frac{-2a}{\sqrt{e}})$ **נקבעו בהתאם לאי-הזוגיות של הפונקציה** $f(x)$**.)**

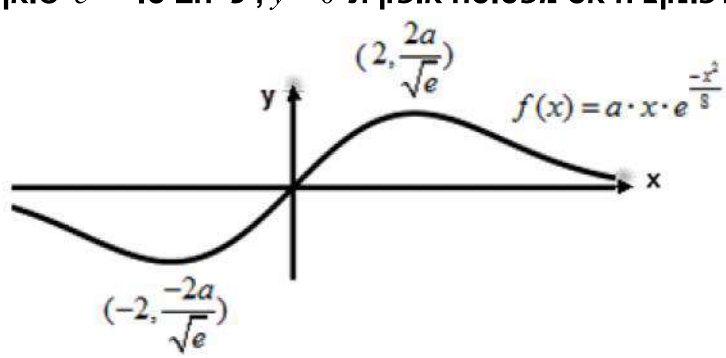
$\frac{a}{4}e^{\frac{-x^2}{8}}$ **חיובי, כי** $a>0$ **ו-** $e^{\frac{-x^2}{8}}>0$**, ולכן סימן הנגזרת נקבע על פי הביטוי** $4-x^2$**.**

לביטוי פרבולה הפוכה ("בוכה"), ותחומי העלייה והירידה המתאימים, קובעים את סוג הקיצון.

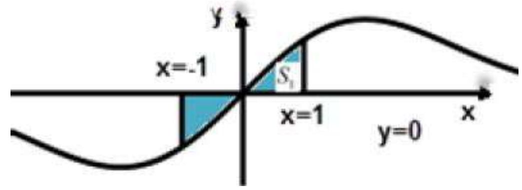
תשובה: $(-2,\frac{-2a}{\sqrt{e}})$ **מינימום ,** $(2,\frac{2a}{\sqrt{e}})$ **מקסימום.**

(2) גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים, בגלל אי זוגיות הפונקציה המוגדרת לכל x**.**

לפונקציה אסימפטוטה אופקית $y=0$ **, כי הביטוי** $e^{\frac{-x^2}{8}}$ **שואף לאפס כאשר** $x\to\pm\infty$ **מהר יותר מאשר** $x\to\pm\infty$**.**



ג. שני השטחים, הצבועים בכחול, שווים בגודלם – כי הפונקציה אי-זוגית ושני הישרים סימטריים גם לציר ה- y **.**



עבור $a=2$ **:** $f(x)=2x\cdot e^{\frac{-x^2}{8}}$ **.**

נחשב שטח של אחד מהשטחים, על פי זיהוי הנגזרת הפנימית (של חזקת הפונקציה המעריכית).

$$S_1=\int_0^1 (2\cdot x\cdot e^{\frac{-x^2}{8}}-0)\,dx$$

$$S_1=\int_0^1 (2\cdot(-4)\cdot e^{\frac{-x^2}{8}}\cdot(\frac{-x}{4}))\,dx$$

$$S_1=-8\cdot e^{\frac{-x^2}{8}}\Big]_0^1$$

$$S_1=-8\cdot(e^{\frac{-1^2}{8}}-e^{\frac{-0^2}{8}})$$

$$S_1=-8\cdot(\frac{1}{\sqrt[8]{e}}-1)$$

$$S_1=8-\frac{8}{\sqrt[8]{e}}$$

ובהתאם גודל השטח כולו הוא $16-\frac{16}{\sqrt[8]{e}}\approx 1.88$**.**

תשובה: השטח המוגבל הוא $16-\frac{16}{\sqrt[8]{e}}\approx 1.88$ **יח"ר.**

ד. נתונה הפונקציה $g(x)$ **המקיימת** $g(x)=\left[f(x)\right]^2$ **.**

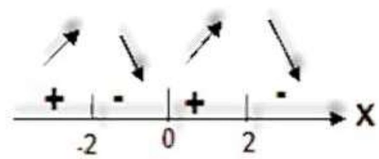
מכאן ש: $g'(x)=2f(x)f'(x)$ **.**

תחומי העלייה והירידה של $g(x)$ **נקבעים, בהתאם,**

על פי תחומי החיוביות/ שליליות של $f(x)$ **,**

ועל פי תחומי העלייה והירידה של $f(x)$ **(שזהים לתחומי החיוביות / שליליות של** $f'(x)$ **).**

על פי הגרף שבסעיף ב (2) נקבל שתחומי העלייה והירידה של $g(x)$ **הם:**



תשובה: $x=-2, x=2$ **מקסימום ,** $x=0$ **מינימום.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=a\cdot x\cdot \ell n\, x-x^2$ ($a>0$ הוא פרמטר).

פונקציית ה- ℓn מקבלת רק ביטויים חיוביים, ולכן $x>0$.

תשובה: הפונקציה מוגדרת עבור $x>0$.

ב. נראה שלפונקציה יש נקודת פיתול אחת בלבד.

$$f'(x)=a(\ell n\, x+x\cdot\frac{1}{x})-2x$$

$$\boxed{f'(x)=a(\ell n\, x+1)-2x}$$

$$f''(x)=a\cdot\frac{1}{x}-2$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{a-2x}{x}}$$

$$a-2x=0\quad\rightarrow\boxed{x=0.5a}$$

מונה הנגזרת השנייה עובר מחיוביות לשליליות, כאשר המכנה חיובי,

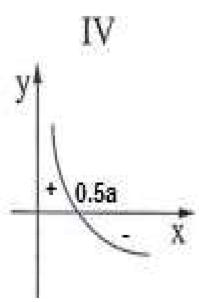
ולכן הפונקציה $f(x)=a\cdot x\cdot \ell n\, x-x^2$ עוברת מקעירות כלפי מעלה $\cup$ לקעירות כלפי מטה וזו נקודת פיתול.

תשובה: $x=0.5a$ הוא שיעור ה- $x=0.5a$ של נקודת הפיתול היחידה.

ג. גרף IV הוא הגרף המתאים.

(1) תחומי החיוביות והשליליות תואמים לאלו שהוצגו בסעיף ב

(2) קיימת אסימפטוטה אנכית $x=0$



ד. (1) נמצא את הערך של a כאשר נתון כי שיפוע המשיק בנקודת הפיתול שווה לאפס, כלומר $f'(0.5a)=0$.

$$0=a(\ell n\,0.5a+1)-2\cdot 0.5a \quad /:a>0$$
$$0=\ell n\,0.5a+1-1$$
$$0=\ell n\,0.5a$$
$$0.5a=1$$
$$\boxed{a=2}$$

תשובה: $a=2$.

(2) עבור $a=2$ שיעור ה- $a=2$ של נקודת הפיתול הוא 1.

כיוון שיש רק מנקודת פיתול אחת, הרי שלפונקצית הנגזרת יש רק קיצון אחד, עבור $x=1$ **.**

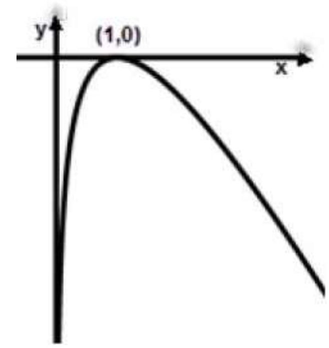
עבור $x<1$ **:** $f''(x)>0$ **ולכן** $f'(x)$ **עולה.**

עבור $x>1$ **:** $f''(x)<0$ **ולכן** $f'(x)$ **יורדת.**

נקודת המקסימום של גרף הנגזרת היא $(1,0)$**, כי היה נתון שערך הנגזרת בנקודת הפיתול הוא** 0 **.**

$x=0$ **אסימפטוטה אנכית לגרף הנגזרת.**

הסקיצה המתאימה:



(3) עבור $x=1$ **הנגזרת אינה מחליפה סימן, ולכן אין נקודת קיצון ל-** $f(x)$ **,**

והיא יורדת לכל $x>0$ **.**

תשובה: אין ל- $f(x)$ **נקודות קיצון.**

ה. שיפוע המשיק בנקודת הפיתול הוא $m=a(\ell n\,0.5a+1)-2\cdot 0.5\cdot a$ **, כלומר:** $m=a(\ell n\,0.5a+1)-a$.

נמצא עבור אילו ערכים של a **שיפוע המשיק גדול מ-** 0 **.**

$$a(\ell n\,0.5a+1)-a>0 \quad /:a>0$$
$$\ell n\,0.5a+1-1>0$$
$$\ell n\,0.5a>0$$
$$0.5a>1$$
$$\boxed{a>2}$$

תשובה: $a>2$ **.**