א. הנקודה A **נמצאת על הפרבולה** $y^2=4x$ **,** $(P=2)$ **, ברביע הראשון.**

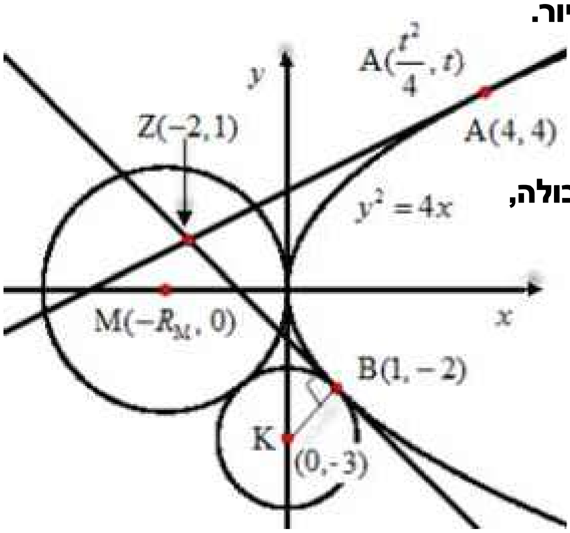
נסמן שיעוריה $\mathrm{A}(\frac{t^2}{4},t)$**. שני המשיקים בנקודות** $\mathrm{A,B}$ **נפגשים בנקודה** $\mathrm{Z}(-2,1)$ **.**

משוואת משיק לפרבולה היא $yy_0=P(x+x_0)$ **ולכן שיפוע המשיק הוא** $m=\frac{P}{y_0}=\frac{2}{t}$ **ושווה גם ל-** m_{AZ}**.**

$\frac{2}{t}=\frac{t-1}{\frac{t^2}{4}+2}$ **ומכאן נקבל** $\frac{2}{t}=\frac{4(t-1)}{t^2+8}$ **ובהמשך** $t^2-2t-8=0$ **ופתרונות המשוואה** $t=4,\ t=-2$**.**

מכאן ש- $\mathrm{A}(4,4)$ **ברביע הראשון ו-** $\mathrm{B}(1,-2)$ **ברביע הרביעי, כמתואר בציור.**

תשובה: $\mathrm{A}(4,4)$ **,** $\mathrm{B}(1,-2)$**.**



ב. (1) מעגל שמרכזו על ציר ה- y **, ושיעוריו בהתאם** $\mathrm{K}(0,y_{\mathrm{K}})$ **משיק לפרבולה,**

ולכן המשיק המשותף, ZB **, מאונך לרדיוס** KB**.**

$m_{\mathrm{ZB}}=\frac{P}{y_{\mathrm{B}}}=\frac{2}{-2}=-1$ **ולכן** $m_{\mathrm{KB}}=1$ **(שיפוע הופכי לנגדי).**

$1=\frac{-2-y_{\mathrm{K}}}{1-0}$ **ונקבל ש-** $y_{\mathrm{K}}=-3$ **ו-** $\mathrm{K}(0,-3)$**.**

תשובה: $\mathrm{K}(0,-3)$**.**

(2) מעגל שמרכזו M **משיק לציר ה-** y **בראשית הצירים, ושיעוריו בהתאם** $\mathrm{M}(-R_{\mathrm{M}},0)$ **,**

משיק גם מבחוץ למעגל שמרכזו $\mathrm{K}(0,-3)$ **, ולכן אורך קטע המרכזים שווה לסכום הרדיוסים.**

$R_{\mathrm{K}}=\mathrm{KB}=\sqrt{(1-0)^2+(-2+3)^2}=\sqrt{2}$ **.**

$$\sqrt{2}+R_{\mathrm{M}}=\sqrt{(-R_{\mathrm{M}}-0)^2+(0+3)^2}$$
$$2+2\sqrt{2}R_{\mathrm{M}}+R_{\mathrm{M}}{}^2=R_{\mathrm{M}}{}^2+9$$
$$R_{\mathrm{M}}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$$

ומשוואת המעגל היא $(x+\frac{7\sqrt{2}}{4})^2+y^2=6.125$**.**

תשובה: $(x+\frac{7\sqrt{2}}{4})^2+y^2=6.125$**.**

א. המישור $2x+y+2z-2m=0$ **מכיל את המשולש** ACO'**.**

הנקודה B **אינה נמצאת על מישור זה, שכן היא במישור** $Z=0$**,**

שישר החיתוך שלו עם המישור הנתון הוא AC **- כאשר** B **אינה על ישר החיתוך.**

כמו כן $AO'\|BC'$ **, שנמצא במישור הנתון, ולכן** BC' **מקביל למישור הנתון.**

<u>עוד הסבר</u>

בטריגו למרחב יש משפט: "אם ישר חותך מישור אז אין במישור ישר המקביל לו",

כיוון שברור ש- $AO'\|BC'$ **אז** BC' **לא יכול לחתוך את המישור על פי ההסבר**

<u>עוד הסבר</u>

כיוון שברור ש- $AO'\|BC'$ **אז המכפלה הסקלרית של** BC' **עם וקטור המקדמים של המישור היא** 0**,**

בדיוק כמו זו של AO'. **מכאן ש-** BC' **מקביל או מוכל במישור.**

בשאלה נשאלנו האם הוא מקביל או חותך את המישור – אז האפשרות הנכונה היחידה שהוא מקביל.

כמוכן ניתן להסביר שהנקודה B **בוודאות לא על המישור כמו שהסברנו בהסבר הראשון,**

או להציב את שיעוריה $(m,2m,0)$ **(כפי שנראה בהמשך) במשוואת המישור** $2x+y+2z-2m=0$,

ואז מקבלים $2m+2m+0-2m=0$**, ומכאן ש-** $m=0$ **וזו סתירה לנתון שהפרמטר** m **הוא חיובי.**

<u>הערה משלימה</u>

אין כל משמעות למשוואת המישור הנתונה, בהקשר של סעיף זה,

BC' **מקביל לכל מישור שעובר בקדקודים** A **,** C **ו-** O'**.**

תשובה: BC' **מקביל למישור הנתון.**

ב. (1) הראינו כי $AO'\|BC'$**.**

$O'M$ **במישור הנתון, וכיוון שאינו מתלכד עם** $O'A$ **וגם יש להם מוצא משותף , הרי ש-** $O'A\nparallel O'M$**.**

מכאן ש- $O'M\nparallel BC'$**.**

תשובה: הישרים BC' **ו-** $O'M$ **אינם מקבילים.**

(2) הישרים BC' **ו-** $O'M$ **מצטלבים,**

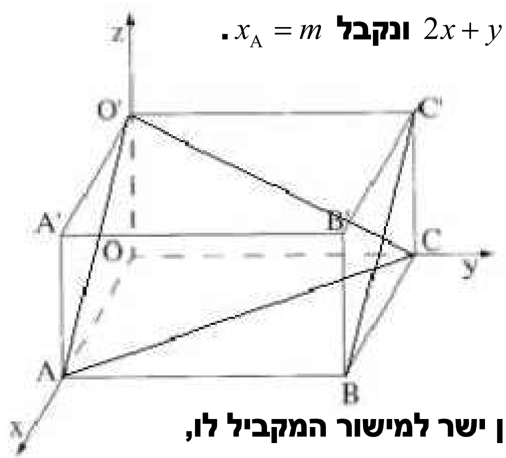
ולכן המרחק ביניהם הוא כמרחק BC' **מהמישור בו** $O'M$ **מוכל, וגם הישר** $O'A$ **המקביל ל -** BC'**.**

כלומר מרחק BC' **מהמישור הנתון** $\pi: 2x+y+2z-2m=0$**, או למשל כמרחקה של הנקודה** B **ממישור זה.**

B **במישור** $Z=0$**, כאשר** $x_B = x_A$ **ו-** $y_B = y_C$**.**

$x_C = z_C = 0$ **: נציב במשוואת המישור הנתון** $2x+y+2z-2m=0$ **ונקבל** $y_C = 2m$**.**

$y_A = z_A = 0$ **: נציב במשוואת המישור הנתון** $2x+y+2z-2m=0$ **ונקבל** $x_A = m$**.**



מכאן ששיעורי הנקודה B **הם** $(m,2m,0)$**.**

$$d_{B_\pi} = \frac{|2m+2m+0-2m|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{2m}{3}$$

תשובה: המרחק הוא $\frac{2m}{3}$ **.**

ג. כיוון ששני האנכים EC' **ו-** FB **מקבילים זה לזה והם אנכים בין ישר למישור המקביל לו,**

הרי שנוצר מלבן $EFBC'$**, שבו** $C'B = EF = 2\sqrt{2}$**.**

$x_{O'} = y_{O'} = 0$ **: נציב במשוואת המישור הנתון ונקבל** $z_{O'} = m$ **ולכן** $C'(0,2m,m)$**, כי** $z_{C'} = z_{O'} = m$**.**

$\overrightarrow{C'B} = \underline{B} - \underline{C'} = \underline{x} = (m,0,-m)$**.**

$2\sqrt{2} = \sqrt{m^2+(-m)^2}$**, ומכאן** $8 = 2m^2$ **ו-** $m=2$ **(**$m>0$**).**

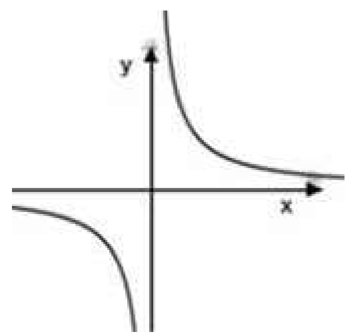
תשובה: $m=2$**.**

א. נסרטט במערכת צירים את המקום הגיאומטרי המקיים $\left|z^2-3i\right|=\left|z^2-i\right|$ **.**

נסמן $z=a+bi$ **.**

$$\left|z^2-3i\right|=\left|z^2-i\right|$$
$$\left|(a+bi)^2-3i\right|=\left|(a+bi)^2-i\right|$$
$$\left|a^2+2abi-b^2-3i\right|=\left|a^2+2abi-b^2-i\right|$$
$$\left|(a^2-b^2)+(2ab-3)i\right|=\left|(a^2-b^2)+(2ab-1)i\right|$$
$$(a^2-b^2)^2+(2ab-3)^2=(a^2-b^2)^2+(2ab-1)^2$$
$$4a^2b^2-12ab+9=4a^2b^2-4ab+1$$
$$8=8ab$$
$$1=ab$$

וזו הפונקציה $y=\frac{1}{x}$ **, היורדת עבור** $x>0$ **או** $x<0$ **, כאשר הצירים מהווים אסימפטוטות לגרף הפונקציה.**



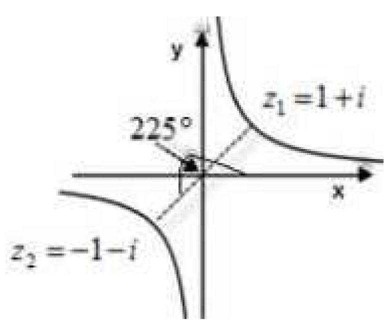
ב. $z_1=1+iy_1$ **נמצא על הפונקציה** $y=\frac{1}{x}$ **.**

נציב $x=1$ **ונקבל** $y=1$ **, כלומר** $z_1=1+i$ **.**

z_1 **באותו מרחק מהראשית כמו זה של** z_2 **.**

כיוון ש- $y=\frac{1}{x}$ **היא פונקציה אי-זוגית, הרי שהנקודה הסימטרית לראשית הצירים היא** $(-1,-1)$ **,**

כאשר $z_2=-1-i$ **, מספר נגדי ל-** $z_1=1+i$ **.**



$$\tan\theta_{Z_2}=\frac{-1}{-1}$$
$$\theta=45°+180°k$$
$$\theta=225° \quad \leftarrow 3rd\ quadrant$$

תשובה: הארגומנט של z_2 **הוא** $225°$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\ell n\frac{a+x}{a-x}$ ($a>0$ הוא פרמטר).

(1) פונקציית ה- ℓn מקבלת רק ביטויים חיוביים.

$$\frac{a+x}{a-x}>0 \quad /\cdot(a-x)^2>0$$
$$(a-x)(a+x)>0$$

מתקבל גרף של פרבולה הפוכה, בעלת מקסימום ("בוכה"), החיובית עבור $-a<x<a$.

תשובה: הפונקציה מוגדרת עבור $-a<x<a$.

(2) על פי חוקי הלוגריתמים: $f(x)=\ell n(a+x)-\ell n(a-x)$.

תזכורת - לפונקציה $\ell n\,x$ יש אסימפטוטה אנכית $x=0$.

בהתאם, עבור הפונקציה הנתונה, שתי האסימפטוטות האנכיות הן $x=a$ ו- $x=-a$.

תשובה: שתי האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x הן $x=a$ ו- $x=-a$.

(3) נמצא תחומי עלייה וירידה.

$$f'(x)=\frac{1}{a+x}-\frac{1\cdot(-1)}{a-x}$$
$$f'(x)=\frac{a-x+a+x}{(a+x)(a-x)}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{2a}{(a+x)(a-x)}}$$

נתון כי $a>0$, ובנוסף המכנה חיובי בתחום ההגדרה, ולכן הנגזרת חיובית בתחום ההגדרה.

תשובה: עלייה: $-a<x<a$, ירידה: אף x .

(4) נמצא את שיעורי נקודות הפיתול.

$$f'(x)=\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}$$
$$f''(x)=\frac{-1}{(a+x)^2}+\frac{-1\cdot(-1)}{(a-x)^2}$$
$$f''(x)=\frac{-(a-x)^2+(a+x)^2}{(a+x)^2\cdot(a-x)^2}$$
$$\boxed{f''(x)=\frac{4ax}{(a+x)^2\cdot(a-x)^2}}$$

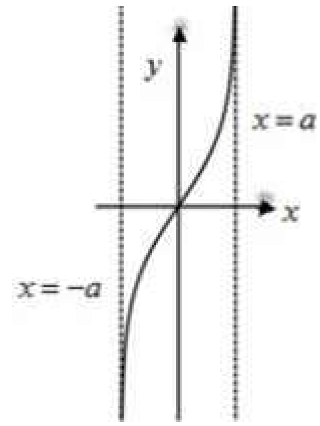
נתון כי $a>0$ ולכן מונה הנגזרת השנייה הוא של קו ישר עולה, המתאפס עבור $x=0$ (המכנה חיובי).

לכן הפונקציה קעורה כלפי מטה עבור $x<0$, וכלפי מעלה עבור $x>0$, ו- $x=0$ פיתול.

$$f(0)=\ell n\frac{a+0}{a-0}=\ell n1=0 \;.$$

תשובה: שיעורי נקודת הפיתול הם $(0,0)$.

ב. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



ג. הישר $y=x$ **, ששיפועו** 1**, משיק לפונקציה בנקודת הפיתול** $(0,0)$ **ולכן** $f'(0)=1$ **.**

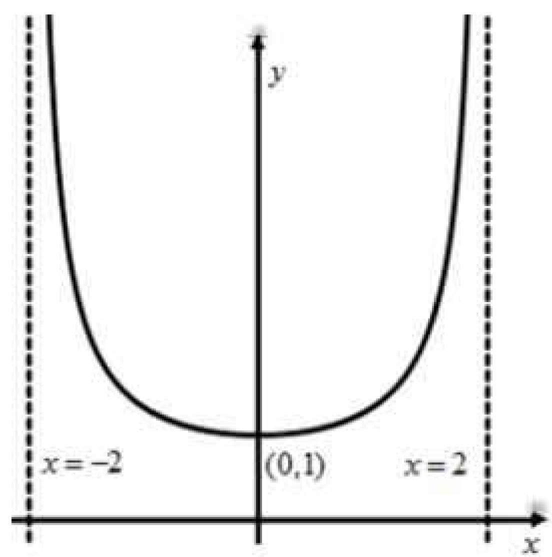
$1=\dfrac{2a}{(a+0)(a-0)}$ **ונקבל ש-** $a=2$ **.**

ראינו כי הפונקציה $f(x)$ **קעורה כלפי מטה עבור** $x<0$ **, וקעורה כלפי מעלה עבור** $x>0$ **,**

ובהתאם $f'(x)$ **יורדת עבור** $x<0$ **, ועולה עבור** $x>0$ **, כאשר** $(0,1)$ **מינימום.**

כמו כן לגרף של $f'(x)=\dfrac{4}{(2+x)(2-x)}$ **, המוגדרת בתחום** $-2<x<2$ **, יש אסימפטוטות אנכיות** $x=2$ **ו-** $x=-2$ **.**

ובהתאם הסקיצה של גרף הנגזרת היא:



בגרות עה יולי 15 מועד קיץ ב שאלון 35807

א. נתונה הפונקציה $f(x)=-\frac{4e^x}{e^x-2}+e^x+4$.

(1) בתחום ההגדרה מתקיים $e^x-2\neq 0$ **, ולכן** $e^x\neq 2$ **ו-** $x\neq \ell n\,2$.

תשובה: $x\neq \ell n\,2$.

(2) עבור $x\to \ell n\,2$ **הביטוי** $\frac{4e^x\to 4\ell n\,2}{e^x-2\to 0}+2+4$ **שואף ל-** $\pm\infty$ **ולכן הישר** $x=\ell n\,2$ **הוא אסימפטוטה.**

עבור $x\to -\infty$ **הביטוי** e^x **שואף ל-** 0 **ולכן** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{4\cdot 0}{0-2}+0+4=4$ **ולכן הישר** $y=4$ **אסימפטוטה.**

תשובה: $x=\ell n\,2$ **,** $y=4$.

(3) נמצא תחומי עלייה וירידה.

$$f'(x)=\frac{-4e^x(e^x-2)+4e^x\cdot e^x}{(e^x-2)^2}+e^x$$

$$f'(x)=e^x\cdot\frac{-4(e^x-2-e^x)+(e^x-2)^2}{(e^x-2)^2}$$

$$f'(x)=e^x\cdot\frac{8+e^{2x}-4e^x+4}{(e^x-2)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=e^x\cdot\frac{e^{2x}-4e^x+12}{(e^x-2)^2}}$$

הביטוי $e^{2x}-4e^x+12$ **אינו מתאפס והוא חיובי לכל** x

(אם נסמן $e^x=t$ **נקבל פרבולה ישרה שאינה מתאפסת), וגם שאר הביטויים בנגזרת חיוביים.**

תשובה: הפונקציה עולה עבור $x>\ell n\,2$ **או** $x<\ell n\,2$ **ויורדת לאף** x .

(4) נמצא את נקודות החיתוך של $f(x)$ **עם הצירים.**

$$f(0)=-\frac{4e^0}{e^0-2}+e^0+4=4+1+4=9 \quad\to \boxed{(0,9)}\ .$$

$$0=-\frac{4e^x}{e^x-2}+e^x+4$$

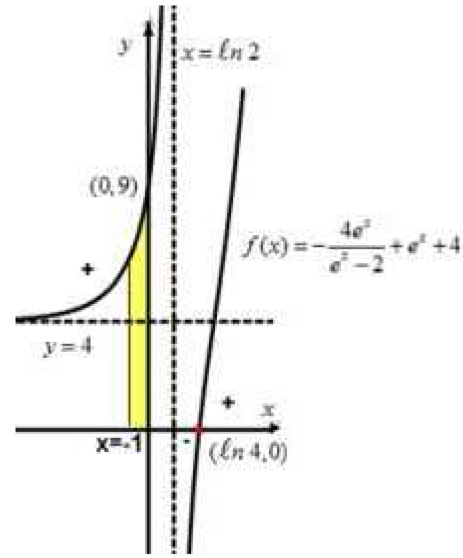
$$0=-4e^x+e^{2x}-2e^x+4e^x-8$$

$$0=e^{2x}-2e^x-8=(e^x-4)(e^x+2)$$

$$x=\ell n\,4 \quad\to \boxed{(\ell n\,4,0)}$$

תשובה: נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ **עם הצירים הן:** $(\ell n\,4,0)$, $(0,9)$.

(5) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ (כולל סימון השטח עבור סעיף ב, וחיוביות/ שליליות עבור סעיף ג).



ב. נחשב את גודל השטח הצהוב, על פי זיהוי הנגזרת הפנימית (של מכנה הביטוי השמאלי בתבנית הפונקציה).

$$S = \int_{-1}^{0} -\frac{4e^x}{e^x - 2} + e^x + 4 - 0)\, dx$$

$$S = \int_{-1}^{0} -4 \cdot \frac{1}{e^x - 2} \cdot e^x + e^x + 4)\, dx$$

$$S = -4 \cdot \ell n \left| e^x - 2 \right| + e^x + 4x \Big]_{-1}^{0}$$

$$S = -4 \cdot \ell n\, 1 + e^0 + 4 \cdot 0 - \left[-4 \cdot \ell n\, (2 - \frac{1}{e}) + e^{-1} + 4 \cdot (-1) \right]$$

$$S = 4 \ell n\ (2 - \frac{1}{e}) + 5 - \frac{1}{e} \approx 6.592$$

הערה: בתחום $x < \ell n\, 2$ **ניתן לרשום ש:** $\int \frac{1}{e^x - 2} = \ell n(-(e^x - 2)) + c = \ell n(2 - e^x) + c$ **, במקום רישום בערך מוחלט.**

תשובה: השטח המוגבל הוא $4\ell n\ (2 - \frac{1}{e}) + 5 - \frac{1}{e} \approx 6.592$ **יח"ר.**

ג. נתונה הפונקציה $F(x) = \int f(x)dx$ **, בתחום** $x > \ell n\, 2$ **.**

מכאן ש: $F'(x) = f(x)$ **.**

תחומי העלייה והירידה של $F(x)$ **נקבעים, בהתאם, על פי תחומי החיוביות/ שליליות של** $f(x)$ **.**

על פי הגרף שבסעיף א (5) נקבל

שתחומי העלייה והירידה של $F(x)$ **הם: עלייה** $x > \ell n\, 4$ **וירידה** $\ell n\, 2 < x < \ell n\, 4$,

ובהתאם שיעור ה- x **של נקודת הקיצון של הפונקציה** $F(x)$ **הוא** $x = \ell n\, 4$ **(מינימום).**

תשובה: $x = \ell n\, 4$ **.**