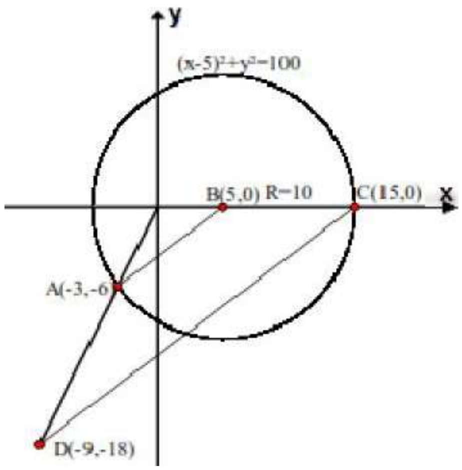
א. אם נפרש את משוואת הישר $\mathrm{AB}: -3x+4y+15=0$ **, נקבל** $y=0.75x-3.75$,

ישר שחותך את ציר ה- x **בנקודה** $\mathrm{B}(5,0)$**, עם שיפוע חיובי.**



BC **מונח על החלק <u>החיובי</u> של ציר ה-** x ,

כאשר הבסיס DC **מקביל, מעל או מתחת, לבסיס** AB ,

במרחק 6 **יחידות (גובה הטרפז).**

ולכן משוואתו הסתומה של DC **היא:** $-3x+4y+c=0$.

נשתמש בנוסחת מרחק בין ישרים מקבילים.

$$\frac{|c-15|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=6$$

$$|c-15|=30$$

$$c-15=30 \quad c-15=-30$$

$$c=45 \quad c=-15$$

עבור $c=-15$ **נקבל שמשוואת הבסיס** DC **היא** $-3x+4y-15=0$**, שחותך את ציר ה-** x **ב-** $\mathrm{C}(-5,0)$ **ונפסל.**

עבור $c=45$ **נקבל שמשוואת הבסיס** DC **היא** $-3x+4y+45=0$**, שחותך את ציר ה-** x **ב-** $\mathrm{C}(15,0)$ **ומאושר.**

תשובה: משוואת הבסיס DC **היא** $-3x+4y+45=0$.

ב. (1) הקדקודים A **ו-** C **נמצאים על מעגל שמרכזו** $\mathrm{B}(5,0)$**, ולכן הרדיוס הוא** $R=x_{\mathrm{C}}-x_{\mathrm{B}}=15-5=10$.

רדיוס המעגל הוא 10 .

(2) משוואת המעגל היא $(x-5)^2+y^2=100$ **. המשוואה המפורשת של הבסיס** AB **היא** $y=0.75x-3.75$.

נציב במשוואת המעגל: $(x-5)^2+(0.75x-3.75)^2=100$**, ונקבל:** $1.5625x^2-15.625x-60.9375=0$.

פתרונות המשוואה הם $x=13$**, שנפסל, כי הקדקוד** A **נמצא ברביע השלישי ו-** $x=-3$ **ובהתאם** $\mathrm{A}(-3,-6)$.

נתון כי המשך השוק AD **עובר בראשית הצירים ולכן משוואתה** $y=2x$.

אם נפגיש את משוואת הישר $y=2x$ **עם משוואת הבסיס** DC **(**$-3x+4y+45=0$ **),**

נקבל $-3x+8x+45=0$**, ומכאן ש** $x=-9$**, ולכן** $\mathrm{D}(-9,-18)$.

תשובה: $\mathrm{D}(-9,-18)$.

פתרון חלופי: המשוואה המפורשת של הבסיס AB **היא** $y=0.75x-3.75=0.75(x-5)$ **.**

$$(x-5)^2+0.75^2(x-5)^2=100 \quad \rightarrow \frac{25}{16}(x-5)^2=100$$
$$(x-5)^2=64$$
$$x-5=8 \quad x-5=-8$$
$$x=13 \quad \rightarrow x=-3$$

$$(x-5)^2+0.75^2(x-5)^2=100 \quad \rightarrow \frac{25}{16}(x-5)^2=100$$
$$(x-5)^2=64$$
$$x-5=8 \quad x-5=-8$$
$$x=13 \quad \rightarrow x=-3$$

א. בסיס הפירמידה ריבוע, שאורך צלעותיו שווה וזוויותיו ישרות.

נציג את הנתונים (כולל חלק מתוצאות החישובים שנראה מאוחר יותר).

$\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{u}}$ $\boxed{|\underline{u}|=5}$ $\boxed{\underline{u}^2=25}$

$\boxed{\overrightarrow{AD}=\underline{v}}$ $\boxed{|\underline{v}|=5}$ $\boxed{\underline{v}^2=25}$

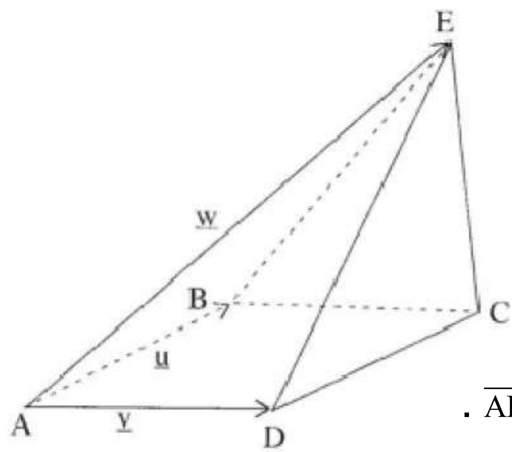
$\boxed{\overrightarrow{AE}=\underline{w}}$ $\boxed{|\underline{w}|=10}$ $\boxed{\underline{w}^2=100}$

$\underline{u}\cdot\underline{v}=0 \leftarrow \underline{u}\perp\underline{v}$

$\underline{u}\cdot\underline{w}=25$

$\underline{v}\cdot\underline{w}=25$

נתון כי $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{DE}$ **, ולכן** $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DE}=0$.



$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DE}=0$$
$$\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})=0$$
$$\underline{v}\cdot(-\underline{v}+\underline{w})=0$$
$$-\underline{v}^2+\underline{v}\underline{w}=0$$
$$-25+\underline{v}\underline{w}=0$$
$$\boxed{\underline{v}\underline{w}=25}$$

נתון כי הווקטור $\overrightarrow{AE}$ **יותר זוויות שוות עם הווקטורים** $\overrightarrow{AD}$ **ו-** $\overrightarrow{AB}$.

$$\cos\sphericalangle EAD=\cos\sphericalangle EAB$$
$$\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}}{\cancel{|\overrightarrow{AE}|}\,|\overrightarrow{AD}|}=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}}{\cancel{|\overrightarrow{AE}|}\,|\overrightarrow{AB}|}$$
$$\frac{\underline{w}\underline{v}}{5}=\frac{\underline{w}\underline{u}}{5}$$
$$\boxed{25=\underline{w}\underline{u}}$$

תשובה: $\underline{w}\underline{v}=25$ **,** $\underline{w}\underline{u}=25$.

ב. נתון כי $\overrightarrow{EH}=\frac{2}{5}\overrightarrow{EC}$ **ו-** $\left|\overrightarrow{AH}\right|=2\sqrt{17}$ **.**

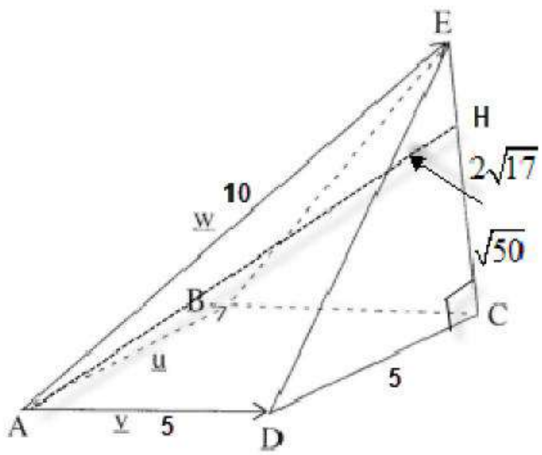
$$\overrightarrow{EH}=\frac{2}{5}\overrightarrow{EC}$$
$$\overrightarrow{EH}=\frac{2}{5}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$$
$$\boxed{\overrightarrow{EH}=\frac{2}{5}\underline{u}+\frac{2}{5}\underline{v}-\frac{2}{5}\underline{w}}$$
$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}=\underline{w}+\frac{2}{5}\underline{u}+\frac{2}{5}\underline{v}-\frac{2}{5}\underline{w}$$
$$\boxed{\overrightarrow{AH}=\frac{2}{5}\underline{u}+\frac{2}{5}\underline{v}+\frac{3}{5}\underline{w}}$$
$$\left|\overrightarrow{AH}\right|=\sqrt{\frac{4}{25}\underline{u}^2+\frac{4}{25}\underline{v}^2+\frac{9}{25}\underline{w}^2+\frac{12}{25}\underline{u}\underline{w}+\frac{12}{25}\underline{v}\underline{w}}$$
$$\left|\overrightarrow{AH}\right|=\sqrt{\frac{4}{25}\cdot 25+\frac{4}{25}\cdot 25+\frac{9}{25}\underline{w}^2+\frac{12}{25}\cdot 25+\frac{12}{25}\cdot 25}=\sqrt{\frac{9}{25}\underline{w}^2+32}$$
$$\left|\overrightarrow{AH}\right|=2\sqrt{17}$$
$$\frac{9}{25}\underline{w}^2+32=68$$
$$\left|\underline{w}\right|=10$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{u}}\quad \boxed{\left|\underline{u}\right|=5}\quad \boxed{\underline{u}^2=25}$$
$$\boxed{\overrightarrow{AD}=\underline{v}}\quad \boxed{\left|\underline{v}\right|=5}\quad \boxed{\underline{v}^2=25}$$
$$\boxed{\overrightarrow{AE}=\underline{w}}\quad \boxed{\left|\underline{w}\right|=10}\quad \boxed{\underline{w}^2=100}$$
$$\underline{u}\cdot\underline{v}=0 \leftarrow \underline{u}\perp\underline{v}$$
$$\underline{u}\cdot\underline{w}=25$$
$$\underline{v}\cdot\underline{w}=25$$

תשובה: אורך המקצוע AE **הוא** 10.

ג. (1) נראה כי $\overrightarrow{DC}\perp\overrightarrow{CE}$**, כלומר** $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CE}=0$

$$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{DC}\cdot(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})$$
$$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CE}=\underline{u}\cdot(-\underline{u}-\underline{v}+\underline{w})=0$$
$$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CE}=-\underline{u}^2+\underline{u}\underline{w}=0$$
$$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CE}=-25+25=0$$
$$\boxed{\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CE}=0}$$



$$\left|\overrightarrow{EC}\right|=\left|-\underline{w}+\underline{v}+\underline{u}\right|$$
$$\left|\overrightarrow{EC}\right|=\sqrt{\underline{w}^2+\underline{v}^2+\underline{u}^2-2\underline{v}\underline{w}-2\underline{u}\underline{w}}$$
$$\left|\overrightarrow{EC}\right|=\sqrt{100+25+25-50-50}=\sqrt{50}$$
$$S_{\Delta EDC}=\frac{\left|\overrightarrow{EC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{50}\cdot 5}{2}=2.5\sqrt{50}$$

תשובה: הוכח שמשולש ΔEDC **ישר זווית ושטחו** $S_{\Delta EDC}=2.5\sqrt{50}$ **.**

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \perp \overrightarrow{\mathrm{DE}}$ **(על פי הנתון) ו-** $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \perp \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ **(זוויות הריבוע ישרות).**

בהתאם, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ **מאונך למישור המשולש** $\Delta\mathrm{EDC}$**, והוא גובה הפירמידה** AEDC **לבסיס** $\Delta\mathrm{EDC}$**.**

$$V_{\mathrm{AEDC}} = \frac{S_{\Delta\mathrm{EDC}} \cdot \mathrm{AD}}{3} = \frac{2.5\sqrt{50} \cdot 5}{3} = 29.46$$.

תשובה: נפח הפירמידה המשולשת AEDC **הוא** 29.46 **.**

א. נתון כי $z^2-2Rcis\theta z-3R^2cis2\theta=0$.

נפתור את המשוואה הריבועית.

$$z_{1,2}=\frac{2Rcis\theta\pm\sqrt{(2Rcis\theta)^2-4\cdot1\cdot(-3R^2cis2\theta)}}{2\cdot1}$$

$$z_{1,2}=\frac{2Rcis\theta\pm\sqrt{4R^2cis2\theta+12R^2cis2\theta}}{2}$$

$$z_{1,2}=\frac{2Rcis\theta\pm\sqrt{16R^2cis2\theta}}{2}=\frac{2Rcis\theta\pm\sqrt{16R^2(cis\theta)^2}}{2}$$

$$z_{1,2}=\frac{2Rcis\theta\pm4Rcis\theta}{2}$$

$$z_1=3Rcis\theta\quad(1st\ quadrant)$$

$$z_2=-Rcis\,\theta$$

לא ניתן לרשום מספר מרוכב עם אורך שלילי,

אולם $-Rcis\theta$ **הוא המספר הנגדי ל** $Rcis\theta$ **ולכן** $z_2=Rcis\,(\theta+180°)$.

תשובה: $z_1=3Rcis\,\theta$ **,** $z_2=Rcis(\theta+180°)$.

ב. נתון כי משוואת הישר העובר דרך z_1 **ו-** z_2 **היא** $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

שיפוע הישר הוא $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **, וכיוון ש-** $m=\tan\theta$ **(** θ **היא הזווית עם הכיוון החיובי של ציר ה-** x **), אז** $\theta=30°$.

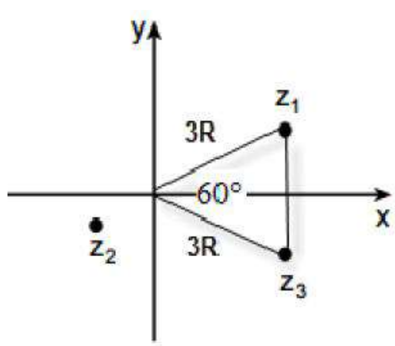
תשובה: $\theta=30°$.

ג. (1) $z_1=3Rcis\,30°$ **ו-** $z_2=Rcis\,210°$.

$z_3=\overline{z}_1=3Rcis(-30°)$.

נמקם במישור גאוס את המספרים המרוכבים

ונסמן כבר את המשולש z_1Oz_3 .



תשובה: השרטוט משמאל.

(2) $\measuredangle z_1Oz_3=30°+30°=60°$

נתון כי $S_{z_1Oz_3}=225\sqrt{3}$.

$$225\sqrt{3}=\frac{3R\cdot3R\sin60°}{2}$$

$$100=R^2$$

$$\boxed{R=10}$$

תשובה: $R=10$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=-3x^2e^{x^3}$ **(פונקציה אי-חיובית).**

שתי הצבות במחשבון: $f(-5)=-3.8\cdot10^{-53}\to0^-$, $f(5)=-1.45\cdot10^{56}\to-\infty$,

ומכאן ש $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל, וגרף הפונקציה יתחיל בירידה ויסתיים בירידה.**

(1) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון.

$$f'(x)=-6xe^{x^3}-3x^2\cdot3x^2\cdot e^{x^3}$$
$$f'(x)=3e^{x^3}(-2x-3x^4)$$
$$0=x(-2-3x^3)$$
$$x=0\quad x=\sqrt[3]{-2/3}=-0.873$$
$$(0,0)\quad(-0.873,-1.175)$$

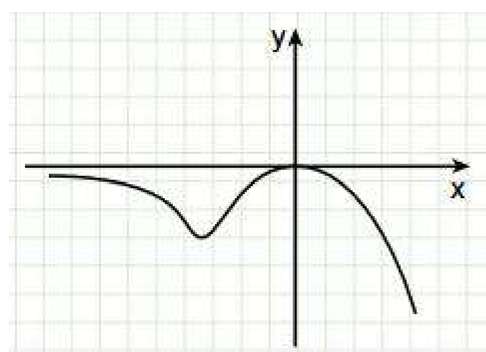
על פי השתנות ערכי הפונקציה (y **) לרבות שתי ההצבות וההבנה שהפונקציה אי-חיובית,**

ניתן לקבוע ש- $(-0.873,-1.175)$ **מינימום, ו-** $(0,0)$ **מקסימום.**

תשובה: $(-0.873,-1.175)$ **מינימום, ו-** $(0,0)$ **מקסימום.**

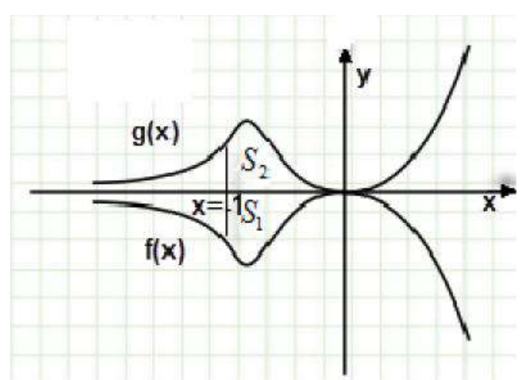
(2) נקודת החיתוך היחידה עם הצירים היא $(0,0)$ **.**

(3) הסקיצה המתאימה.



(4) $g(x)=|f(x)|=-f(x)$ **, כי** $f(x)$ **פונקציה אי-חיובית ו-** $g(x)$ **תהייה אי-שלילית, סימטרית לציר ה-** x **.**

הסקיצה המתאימה, כולל סימון שטחים לסעיף הבא.



ב. עקב הסימטריה לציר ה- x **, של שתי הפונקציות, הרי ש-** $S_1 = S_2$ **.**

נחשב את האינטגרל על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית.

$$S_2 = \int_{-1}^{0} (e^{x^3} \cdot 3x^2)\, dx$$

$$S_2 = e^{x^3} \Big]_{-1}^{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=0: \quad e^{0^3} = 1 \\ x=-1: \quad e^{(-1)^3} = \frac{1}{e} \end{array}\right\} S_2 = 1 - \frac{1}{e} \rightarrow S_2 + S_1 = 2 - \frac{2}{e}$$

תשובה: גודל השטח הוא $2-\frac{2}{e}$ **.**

ג. $t(a) = \int_{-1}^{0} g(x)\, dx$ **,** $h(a) = \int_{-1}^{0} f(x)\, dx = -\int_{-1}^{0} g(x)\, dx$, $a \ge -1$ **.**

מכאן נקבל ש: $h(a) = -t(a)$

בנקודת החיתוך של הגרפים, $h(a) = t(a)$ **, אבל** $h(a) = -t(a)$ **ולכן** $t(a) = 0$ **.**

$t(a) = 0$ **כאשר** S_2 **השטח שמימין לישר** $x=-1$ **, הפונקציה** $g(x)$ **וציר ה-** x **הוא אפס (שטח מנוון).**

פתרון זה אפשרי רק כאשר $a=-1$ **, ולכן שיעורי נקודת הפגישה בין** $h(a)$ **ל-** $t(a)$ **הם** $(-1, 0)$ **.**

תשובה: שיעורי נקודת הפגישה הם $(-1, 0)$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{2}(\frac{1}{2}-\ell n\,x)$.

(1) תחום ההגדרה $x>0$ **(ביטוי שמקבלת פונקציה לוגריתמית צריך להיות חיובי).**

שתי הצבות במחשבון: $f(0.0001)=4.86\cdot 10^{-8}\to 0^{+}$, $f(10000)=-6.66\cdot 10^{12}\to -\infty$,

ומכאן שהגרף יצא מ- $(0,0)$ **(נקודה ריקה) בעלייה ויסתיים בירידה.**

(2) נמצא את שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה- x .

$$0=\frac{1}{2}-\ell n\,x$$

$$\ell n\,x=\frac{1}{2}\to x=\sqrt{e}$$

תשובה: $(\sqrt{e},0)$.

(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון.

$$f(x)=\frac{x^2}{2}(\frac{1}{2}-\ell n\,x)$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[2x(\frac{1}{2}-\ell n\,x)-\frac{x^2}{x}\right]$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[x-2x\ell n\,x-x\right]$$

$$\boxed{f'(x)=-x\ell n\,x}$$

$$\ell n\,x=0\ \to x=1\to (1,0.25)$$

$$f''(x)=-\ell n\,x-\frac{x}{x}$$

$$\boxed{f''(x)=-\ell n\,x-1}$$

$$f''(1)=-1<0\ \to Max$$

תשובה: $(1,0.25)$ **מקסימום.**

ב. (1) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של פונקציית הנגזרת.

$$0=-\ell n\,x-1$$

$$\ell n\,x=-1\quad \to x=\frac{1}{e}\quad \to (\frac{1}{e},\frac{1}{e})$$

$$f'''(x)=-\frac{1}{x}<0\quad \to (\frac{1}{e},\frac{1}{e}), Max$$

תשובה: $(\frac{1}{e},\frac{1}{e})$ **מקסימום.**

שתי הצבות במחשבון: $f'(0.0001)=9.2\cdot 10^{-4}\to 0^{+}$, $f(10000)=-92103\to -\infty$,

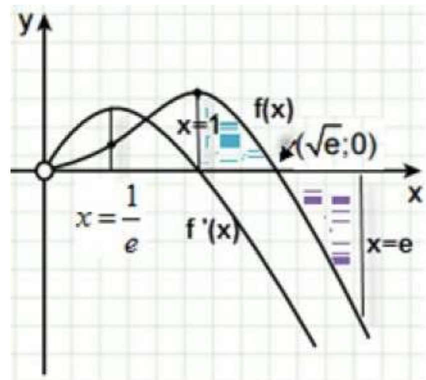
ומכאן שהגרף יצא מ- $(0,0)$ **(נקודה ריקה) בעלייה ויסתיים בירידה.**

(2) כאשר הנגזרת עוברת מעלייה לירידה, אז הנגזרת השנייה עוברת מחיוביות לשליליות,

ומתקבלת נקודת פיתול, כאשר $x=\frac{1}{e}$ **.** $f(\frac{1}{e})=\frac{(1/e)^2}{2}(\frac{1}{2}-\ell n(\frac{1}{e}))=\frac{1}{2e^2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4e^2}$ **.**

תשובה: שיעורי נקודת הפיתול הם $(\frac{1}{e},\frac{3}{4e^2})$ **.**

ג. (1) שרטוט של גרף הפונקציה וגרף הנגזרת (כולל סימון השטח לסעיף ד).



(2) גרף הפונקציה והנגזרת נפגשים בתחום $\frac{1}{e}<x<1$ **.**

ד. נתון: $g'(x)=f(x)$ **,** $g(1)=a$ **,** $g(\sqrt{e})=b$ **,** $g(e)=c$ **.**

נחשב את השטח המבוקש, חיבור של שני שטחים.

$$\int_1^{\sqrt{e}}(f(x))\,dx=g(x)\Big]_1^{\sqrt{e}}$$

$$\left.\begin{aligned}x=\sqrt{e}:&\quad g(\sqrt{e})=b\\ x=1:&\quad g(1)=a\end{aligned}\right\}=b-a$$

$$\int_{\sqrt{e}}^{e}(0-f(x))\,dx=-g(x)\Big]_{\sqrt{e}}^{e}$$

$$\left.\begin{aligned}x=e:&\quad -g(e)=-c\\ x=\sqrt{e}:&\quad -g(\sqrt{e})=-b\end{aligned}\right\}=-c+b$$

תשובה: השטח המבוקש הוא $2b-a-c$ **.**