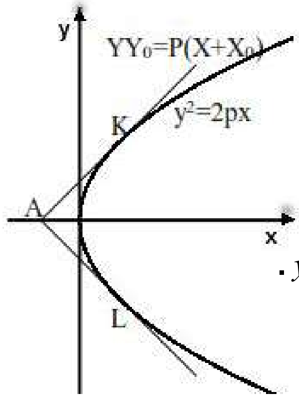
**א. (1) נתונה פרבולה שמשוואתה** $y^2 = 2px$ .




**כיוון שהפרבולה סימטרית לציר ה-** $x$ **,**

**ושני המשיקים נפגשים בנקודה שעל ציר ה-** $x$ **,**

**הרי שבהכרח שיעורי ה-** $x$ **של נקודות ההשקה שווים,**

**ושיעורי ה-** $y$ **נגדיים.**

**נראה גם באמצעות חישוב (שממילא נדרש להמשך התרגיל).**

**משוואת המשיק לפרבולה, בנקודת ההשקה, היא** $yy_0 = p(x + x_0)$ .

**אם נציב** $y = 0$ **, נקבל** $x = -x_0$ **, ולכן** $x_K = -x_A$ **ו-** $x_L = -x_A$ **,**

**ומכאן ש-** $x_K = x_L$ .

**תשובה: הוּכַח.**

**(2) נתון כי המשיקים נחתכים גם על מדריך הפרבולה, כלומר** $x_A = -\frac{p}{2}$ .

**לכן,** $x_K = x_L = \frac{p}{2}$ **. נציב במשוואת הפרבולה ונקבל** $y^2 = 2p \cdot \frac{p}{2}$ **ובהתאם** $y = \pm p$ .

**מבלי להגביל את הכלליות, נסמן:** $L(\frac{p}{2}, -p)$ , $K(\frac{p}{2}, p)$ .

**שיפוע המשיק בנקודה** $K(\frac{p}{2}, p)$ **הוא:** $\frac{p}{y_0} = \frac{p}{p} = 1$ **, ובנקודה** $L(\frac{p}{2}, -p)$ **הוא:** $\frac{p}{y_0} = \frac{p}{-p} = -1$ **,**

**מכאן שמכפלת השיפועים היא** $-1$ **, והמשיקים מאונכים זה לזה.**

**תשובה: הוּכַח.**

**ב. נציב** $p = 2$ **ומשוואת הפרבולה היא** $y^2 = 4x$ **, ושיעורי נקודות ההשקה:** $K(1,2)$ , $L(1,-2)$ .

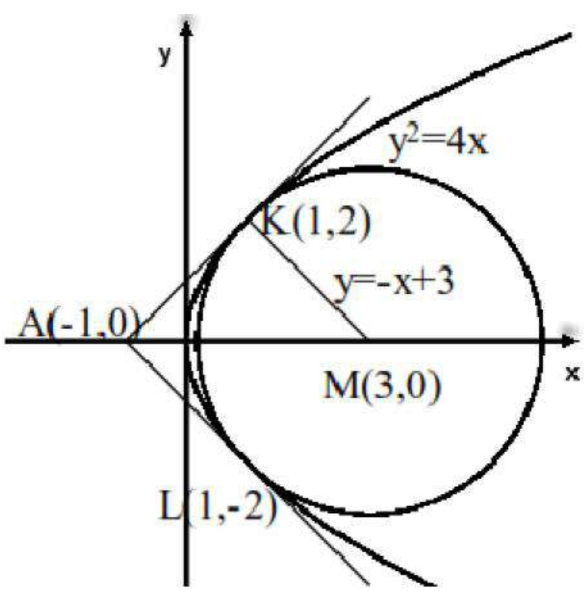
**הרדיוס** MK **מאונך למשיק, ולכן שיפועו** $-1$ **ומשוואת הרדיוס היא** $y - 2 = -1(x - 1) \rightarrow y = -x + 3$ **,**

**החותך את ציר ה-** $x$ **בנקודה** $M(3,0)$ .

**אורך הרדיוס:** $R = \sqrt{(1-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8}$

**ומשוואת המעגל היא** $(x-3)^2 + y^2 = 8$ .

**תשובה: משוואת המעגל היא** $(x-3)^2 + y^2 = 8$ .




נכת

**ג. אורך** AK **:** $\sqrt{(1-(-1))^2+(2-0)^2}=\sqrt{8}$ **וכמובן שגם אורך** AL **.**

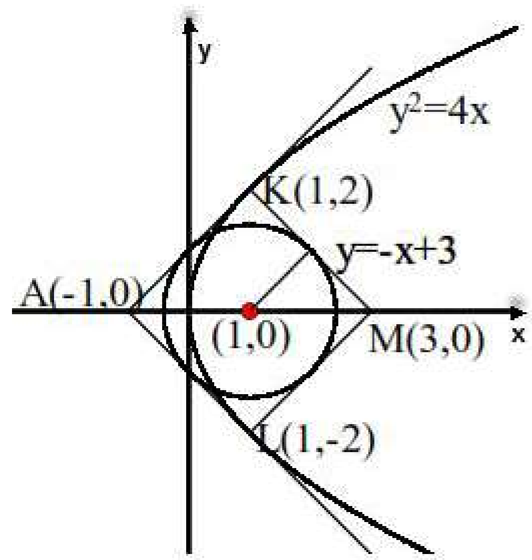
**מכאן שהמרובע** AKML **הוא ריבוע, ומרכז המעגל החסום הוא גם מפגש אלכסונים.**

**אמצע האלכסון** AM **הוא** $(1,0)$ **וזה מרכז המעגל החסום במרובע זה.**

**אורך הרדיוס הוא מרחק המרכז, למשל, מהצלע** KM **שמשוואתה** $y=-x+3$ **, או** $x+y-3=0$ **.**

$r=-\frac{1+0-3}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ **ומשוואת המעגל החסום היא** $(x-1)^2+y^2=2$ **.**

**תשובה: משוואת המעגל החסום במרובע** AKML **היא** $(x-1)^2+y^2=2$ **.**



**א. נתון מעגל, הנמצא במישור** $\pi$ **, ומרכזו בראשית הצירים** $O(0,0,0)$.

**הישר** $l_1 : \underline{x} = (2,2,0) + t(1,2,1)$ **נמצא במישור זה ומשיק למעגל בנקודה** $B$ ,

**ולכן הרדיוס מאונך לנקודת ההשקה והמכפלה הסקלרית, של וקטורי הכיוון, שווה ל-** $0$.

**נסמן** $B(2+t, 2+2t, t)$ **נקודה טיפוסית על הישר,**

**ומכיוון שהרדיוס מגיע מראשית הצירים, הרי שההצגה הפרמטרית של הרדיוס היא** $\underline{x} = (2+t, 2+2t, t)$.

$$(2+t, 2+2t, t) \cdot (1,2,1) = 0$$
$$2+t+4+4t+t = 0$$
$$t = -1$$

**ובהתאם שיעורי הנקודה** $B(1,0,-1)$.

**תשובה:** $B(1,0,-1)$ .

**ב. (1) נמצא את משוואת המישור** $\pi$**, שההצגה הפרמטרית שלו היא :** $\underline{x} = t(1,2,1) + r(1,0,-1)$ ,

**על פי וקטור הכיוון הנתון ווקטור הכיוון מ-** $B(1,0,-1)$ **לראשית הצירים, שנמצאת על מישור זה.**

$$(a,b,c) \cdot (1,0,-1) = 0 \quad \to a - c = 0 \quad \to a = c = 1$$
$$(a,b,c) \cdot (1,2,1) = 0 \quad \to a + 2b + c = 0 \quad \to 1 + 2b + 1 = 0 \quad \to b = -1$$

**מכאן שמשוואת המישור** $\pi$**, העובר בראשית הצירים, היא** $\pi : x - y + z = 0$.

**נקודה טיפוסית על הישר** $l_2 = \underline{x} = (0,1,1) + s(2,-1,1)$ **היא** $(2s, 1-s, 1+s)$.

**נציב במשוואת המישור ונקבל:**

$$2s - (1-s) + 1 + s = 0 \quad \to 2s - 1 + s + 1 + s = 0 \quad \to s = 0$$

**ובהתאם שיעורי הנקודה** $A(0,1,1)$ **, שהיא נקודת החיתוך של הישר** $l_2$ **עם המישור** $\pi$.

**נראה שמרחקה ממרכז המעגל, ראשית הצירים, שווה לרדיוס המעגל.**

$$d_{BO} = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}$$
$$d_{AO} = \sqrt{(0-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

**תשובה:** $A(0,1,1)$ **נמצאת על המעגל .**

**(2) משולש** $AOB$ **שווה שוקיים, כאשר אורכי השוקיים** $\sqrt{2}$.

$$\cos \sphericalangle AOB = \frac{(1,0,-1) \cdot (0,1,1)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \to \sphericalangle AOB = 120^\circ$$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{OA \cdot OB \cdot \sin \sphericalangle AOB}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**תשובה: שטח המשולש** $AOB$ **הוא** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **יח"ר .**

**(1) נתון המספר המרוכב** $z=\dfrac{(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9})^3}{(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12})^2}$ .

**נשתמש בזהויות** $-\sin(\alpha)=\sin(-\alpha)$ , $\cos\alpha=\cos(-\alpha)$ **, ולאחר מכן בנוסחאות דה-מואבר.**

$$z=\frac{(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9})^3}{(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12})^2}$$

$$z=\frac{(cis\frac{\pi}{9})^3}{(\cos(-\frac{\pi}{12})+i\sin(-\frac{\pi}{12}))^2}$$

$$z=\frac{(cis\frac{\pi}{9})^3}{(cis(-\frac{\pi}{12}))^2}$$

$$z=\frac{cis\frac{\pi}{3}}{cis(-\frac{\pi}{6})}=cis(\frac{\pi}{3}-(-\frac{\pi}{6}))$$

$$\boxed{z=cis\frac{\pi}{2}}$$

**תשובה:** $|z|=1$ **,** $\arg(z)=\frac{\pi}{2}$ **, או** $\arg(z)=90°$.

**(2)** $z^n=(cis\frac{\pi}{2})^n=cis(\frac{\pi}{2}\cdot n)$

**מספר מדומה טהור ממוקם על הציר המדומה במישור גאוס, ובמקרה זה עבור** $\arg(z^n)=\frac{\pi}{2}+\pi k$.

**מכאן ש-** $\frac{\pi}{2}\cdot n=\frac{\pi}{2}+\pi k \quad /:\frac{\pi}{2}$

$$n=1+2k$$

**תנאי זה יתקיים עבור** $n$ **טבעי אי-זוגי ,כשיש לשים לב ש-** $k$ **חייב להיות טבעי או** $0$ .

**דרך נוספת לפתור תת סעיף זה היא עפ"י המחזוריות של המספר** $i$ **, כשהוא מועלה בחזקה זוגית/ אי-זוגית :**

**בתת סעיף 1 מתקבל** $z=i$ **בהצגה האלגברית, ואז עלינו לגלות, לאלו ערכי** $n$ $(i)^n$ **הוא מספר מדומה טהור.**

**קל לראות, שכאשר-** $n$ **טבעי זוגי , אז** $(i)^n$ **הוא מספר ממשי טהור, כלומר** $z^n=\pm1$ ,

**וכאשר** $n$ **טבעי אי-זוגי , אז** $(i)^n$ **הוא מספר מדומה טהור, כלומר** $z^n=\pm i$ .

**תשובה: עבור ערכי** $n$ **טבעיים אי-זוגיים, נקבל ש-** $z^n$ **הוא מספר מדומה טהור .**

# 3ב



**(1) נתון המקום הגיאומטרי** $\left|(z+\bar{z})-m(z-\bar{z})\right|=40$ **, כאשר** $m>1$ **מספר ממשי.**

**נזהה את המקום הגיאומטרי.**

**נסמן** $z=x+yi$

$$\left|(x+yi+x-yi)-m(x+yi-(x-yi)\right|=40$$
$$\left|2x-2myi\right|=40$$
$$\sqrt{(2x)^2+(2my)^2}=40$$
$$4x^2+4m^2y^2=1600$$
$$\frac{x^2}{400}+\frac{m^2y^2}{400}=1$$

**כיוון שנתון כי** $m>1$ **ממשי, הרי ש-** $m^2>1$ **והמשוואה שהתקבלה היא של אליפסה (ולא של מעגל).**

**כאשר:** $a=20\,,\, b=\frac{20}{m}$ **.**

**תשובה: המקום הגיאומטרי הוא אליפסה.**

**(2) נתון כי הנקודה** $12+8i$**.**

**נציב** $(12,8)$ **במשוואת האליפסה.**

$$\frac{12^2}{400}+\frac{m^2\cdot 8^2}{400}=1$$
$$\frac{144}{400}+\frac{64m^2}{400}=1$$
$$144+64m^2=400$$
$$m^2=4$$
$$m=2 \quad \leftarrow m>1$$

**משוואת האליפסה היא** $\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{100}=1$ **, כאשר:** $a=20\,,\, b=10$ **.**

**ובהתאם: שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים:** $(20,0)\,,\,(-20,0)\,,\,(0,10)\,,\,(0,-10)$ **.**

**תשובה:** $(20,0)\,,\,(-20,0)\,,\,(0,10)\,,\,(0,-10)$ **.**

**א. נתונה הפונקציה** $f(x)=9^x-2\cdot3^x-3$ **, המוגדרת לכל** $x$ **.**

**נעבוד עם התבנית הבאה:** $f(x)=3^{2x}-2\cdot3^x-3$ **, כי נוח לעבוד עם בסיסים זהים.**

**שתי הצבות במחשבון:** $f(-5)=-3.008\to-3$ , $f(5)=58,560\to+\infty$ **,**

**ומכאן ש** $y=-3$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל, וגרף הפונקציה יתחיל בירידה ויסתיים בעלייה.**

**(1) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.**

**ציר ה-** $y$ **,** $x=0$ **:** $f(0)=3^{2\cdot0}-2\cdot3^0-3=-4\to(0,-4)$ **.**

**ציר ה-** $x$ **,** $y=0$ **:**

$$0=3^{2x}-2\cdot3^x-3$$
$$(3^x)_{1,2}=\frac{2\pm4}{2}(3^x)_{1,2}=\frac{2\pm4}{2}$$
$$3^x=3\quad\to x=1\quad\to(1,0)$$
$$3^x=-1\quad\to\varnothing\ (3^x>0)$$

**תשובה:** $(0,-4)$ **,** $(1,0)$ **.**

**(2) כאמור,** $y=-3$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל.**

**אפשר להבין זאת, גם מהעובדה ששני המחוברים הראשונים, בתבנית הפונקציה** $f(x)=3^{2x}-2\cdot3^x-3$ **,**

**שואפים לאפס, עבור איקסים ששואפים למינוס אינסוף, ולכן** $f(x)\to0-0-3=-3$ **.**

**תשובה:** $y=-3$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל.**

**(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון.**

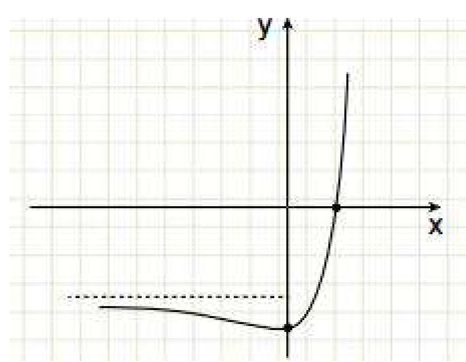
$$f'(x)=2\cdot3^{2x}\cdot\ell n3-2\cdot3^x\cdot\ell n3$$
$$0=2\ell n3\cdot3^x(3^x-1)$$
$$3^x=1\quad\to x=0\quad\to(0,-4)$$

**על פי השתנות ערכי הפונקציה (** $y$ **) לרבות שתי ההצבות , הנקודה** $(1,0)$ **, והאסימפטוטה** $y=-3$ **,**

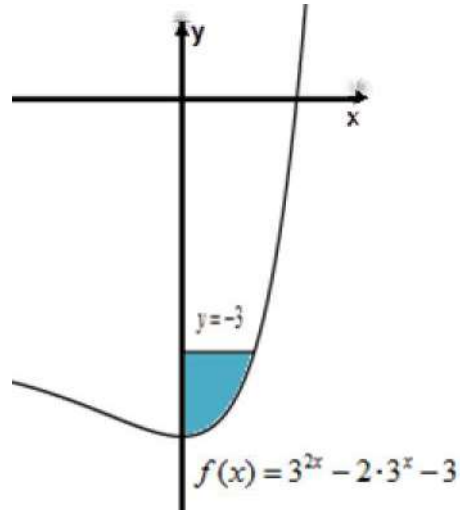
**ניתן לקבוע ש-** $(0,-4)$ **מינימום.**

**תשובה:** $(0,-4)$ **מינימום.**

**(4) הסקיצה המתאימה**



**ב. נחשב את השטח המבוקש**




**נמצא את גבול השטח מימין:**

$$3^{2x}-2\cdot3^{x}-3=-3$$
$$3^{x}(3^{x}-2)=0$$
$$3^{x}=2\quad\to x=\ell og_{3}2$$

$$S=\int_{0}^{\ell og_3 2}(-3-(3^{2x}-2\cdot3^{x}-3))\,dx$$

$$S=\int_{0}^{\ell og_3 2}(-3^{2x}+2\cdot3^{x})\,dx$$

$$S=\frac{-3^{2x}}{2\ell n3}+\frac{2\cdot3^{x}}{\ell n3}\Big]_{0}^{\ell og_3 2}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=\ell og_3 2: & \frac{-3^{2\cdot\ell og_3 2}}{2\ell n3}+\frac{2\cdot3^{\ell og_3 2}}{\ell n3}=\frac{-4}{2\ell n3}+\frac{2\cdot2}{\ell n3}=\frac{2}{\ell n3} \\ x=0: & \frac{-3^{2\cdot0}}{2\ell n3}+\frac{2\cdot3^{0}}{\ell n3}=\frac{-1}{2\ell n3}+\frac{2}{\ell n3}=\frac{3}{2\ell n3} \end{array}\right\} S=\frac{2}{\ell n3}-\frac{3}{2\ell n3}=\frac{1}{2\ell n3}\approx0.455$$

**תשובה: גודל השטח הוא** $\frac{1}{2\ell n3}\approx0.455$ **יח"ר.**

**ג. נתונה הפונקציה ,** $g(x)=f(x)+4$ , **תזוזה של ארבע יחידות כלפי מעלה של הפונקציה המקורית.**

**גודל השטח שמצאנו בסעיף ב', שווה לשטח מימין לציר ה-** $y$ **(כמו בשטח הנתון),**

**המוגבל על ידי** $g(x)=f(x)+4$ **והישר** $y=k$ **.**

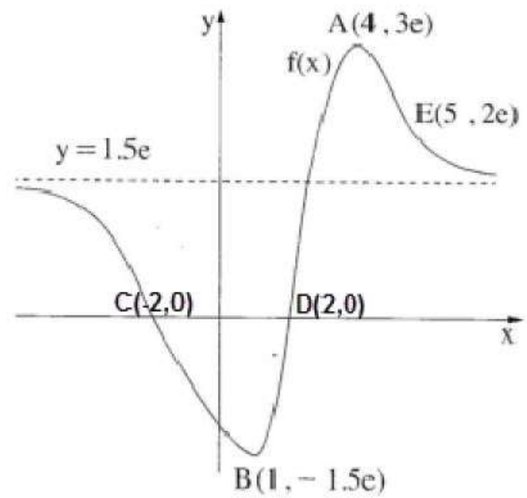
**מכאן שהישר** $y=k$ **הוא תזוזה אנכית כלפי מעלה בארבע יחידות של האסימפטוטה** $y=-3$ **,**

**ומכאן ש-** $k=-3+4=1$ **(כאשר** $y=1$ **הוא האסימפטוטה האופקית, לשמאל, של** $g(x)=f(x)+4$ **).**

**תשובה:** $k=1$ **.**

בגרות עו יולי 16 מועד קיץ ב שאלון 35807/35582

**א. נתונה הפונקציה $f(x)$ ומספר נקודות שעל הגרף שלה, כמתואר בגרף הבא.**




**$f(x)$ קעורה כלפי מטה $(\cap)$ בתחום $x<-2$ או $2<x<5$, כלומר בתחומים אלה $f'(x)$ יורדת.**

**$f(x)$ קעורה כלפי מעלה $(\cup)$ בתחום $x>5$ או $-2<x<2$, כלומר בתחומים אלה $f'(x)$ עולה.**

**מכאן ניתן ללמוד כי $f'(x)$ עוברת מירידה לעליה עבור $x=-2$, או $x=5$ ואלו נקודות מינימום,**

**ו- $f'(x)$ עוברת מעליה לירידה עבור $x=2$, וזו נקודת מקסימום.**

**(כמו כן, הנקודות $(5,2e)$, $(-2,0)$ ו- $(2,0)$ הן נקודות פיתול של $f(x)$, כפי שניתן לראות בגרף הנתון.)**

**תשובה: $x=-2$ מינימום, $x=5$ מינימום, $x=2$ מקסימום.**

**ב. נתון כי** $g(x)=\ell n\left[f(x)\right]$

**(1) הפונקציה $g(x)$ מוגדרת כאשר $f(x)>0$, כלומר על פי הגרף הנתון עבור $x>2$, או $x<-2$.**

**תשובה: $x>2$, או $x<-2$.**

**(2) כאשר $f(x)\to 0$, מתקיים $g(x)\to -\infty$ ובהתאם הישרים $x=2$, או $x=-2$ אסימפטוטות אנכיות.**

**תשובה: $x=2$, או $x=-2$.**

**(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון.** $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

**המכנה חיובי בתחום ההגדרה, ו- $g'(x)=0$ כאשר $f'(x)=0$,**

**ותחומי עלייה וירידה זהים בתחום ההגדרה $x>2$, או $x<-2$.**

**מכאן ש- $x=4$ מקסימום, ונקודת הקיצון של $g(x)$ היא** $(4,\ell n\left[f(4)\right]) \to (4,\ell n(3e))$

**תשובה: $(4,\ell n(3e))$ מקסימום.**

(4) כאשר $x \to \pm\infty$ , מתקיים $f(x) \to 1.5e$ וקיימת אסימפטוטה אופקית $y = 1.5e$ .

בהתאם: כאשר $x \to \pm\infty$ , מתקיים $g(x) \to \ell n(1.5e)$

וקיימת אסימפטוטה אופקית $y = \ell n(1.5e)$ , כפי שגם הובא כנתון.

הסקיצה המתאימה: