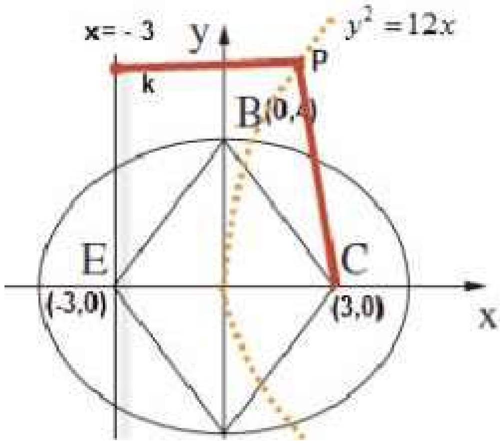
א. (1) שטח מעוין שווה למכפלת צלע בגובה, או למחצית מכפלת האלכסונים.
לכן, שטחו 24 **יח"ר** $5\cdot4.8=$ **, בהתאם לנתונים על אורך צלע המעוין ואורך גובהו.**
כיוון שהאלכסונים במעוין חוצים זה את זה, ובמקרה זה נחצים בראשית
(כי אם לא יחצו בראשית, נקבל דלתון ולא מעוין),
הרי ששטח המעוין הוא גם $\frac{2x_C\cdot2y_B}{2}$ **, ונקבל** $\frac{2x_C\cdot2y_B}{2}=24$ **ומכאן ש:** $y_B=\frac{12}{x_C}$ **.**

על-פי משפט פיתגורס ב- ΔBOC **(**O **ראשית הצירים):** $(x_C)^2+(\frac{12}{x_C})^2=5^2$ **.**



$$(x_C)^4-25(x_C)^2+144=0$$
$$x_C=3\ \rightarrow y_B=4\quad o.k.\,(BD>AC)$$
$$x_C=4\ \rightarrow y_B=3\quad not\ o.k.\,(BD<AC)$$

שאר הקדקודים בהתאם לסימטריה לראשית הצירים.

תשובה: $B(0,4),\quad C(3,0),\quad D(0,-4),\quad E(-3,0)$ **.**

(2) מוקדי האליפסה הם $C(3,0),\quad E(-3,0)$ **, ובהתאם** $c=3$ **.**

האליפסה עוברת בקדקודים $B(0,4),\quad D(0,-4)$ **, ובהתאם** $b=4$ **.**

$a^2-b^2=c^2$ **, ולכן** $a=\sqrt{4^2+3^2}=5$ **.**

או, סכום מרחקי נקודה שעל האליפסה מהמוקדים קבוע ושווה ל- $2a$ **.**

לכן: $BC+BE=2\cdot5=10\quad\rightarrow a=5$

תשובה: משוואת האליפסה היא $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ **.**

ב. הנקודה $M(\sqrt{15},y_M)$ **נמצאת, ברביע הראשון, על האליפסה וגם על הפרבולה** $y^2=2px$ **.**

נציב את שיעוריה במשוואת האליפסה:

$\frac{\sqrt{15}^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ **ונקבל** $y_M=1.25$ **.**

נציב $M(1.25,\sqrt{15})$ **במשוואת הפרבולה:** $\sqrt{15}^2=2p\cdot1.25$ **ולכן** $p=6$ **.**

משוואת הפרבולה היא $y^2=12x$ **, והמוקד שלה הוא ב-** $(\frac{p}{2},0)=(\frac{6}{2},0)=(3,0)$ **, כלומר בנקודה** $C(3,0)$ **.**

תשובה: הוכח.

ג. כל נקודה על פרבולה, נמצאת במרחקים שווים מהמוקד ומהמדריך שלה.

בפרבולה $y^2=12x$ **, המוקד הוא** $C(3,0)$ **, והמדריך הוא הישר** $x=-3$ **, המקביל לציר ה-** y **ועובר ב** $E(-3,0)$ **.**

לכן PC **הוא המרחק מהמוקד, ו-** k **הוא המרחק מהמדריך – והם שווים זה לזה.**

תשובה: $\frac{PC}{k}=1$ **.**

א. $SABCD$ **היא פירמידה ישרה, מכאן שהמקצועות הצדדיים שווים זה לזה,**

והגובה יורד למרכז המעגל החוסם – במקרה זה למפגש אלכסוני ריבוע הבסיס.

(1) נראה כי $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ **.**

$$\boxed{\overrightarrow{SM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SM}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AS}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AS}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AS}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AS}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SC})$$

$$\boxed{\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$$

תשובה: הוכח.

(2) נראה כי $\overrightarrow{SM}\perp\overrightarrow{AC}$ **.**

כיוון שמקצועות צדדיים שווים זה לזה, הרי ש- ΔSAC **הוא שווה שוקיים.**

בסעיף א(1) הראינו כי M **הוא אמצע** AC **, כלומר ש-** SM **תיכון לבסיס במשולש שווה שוקיים,**

ולכן הוא גם גובה לבסיס המשולש.

דרך חלופית, הגובה של פירמידה ישרה יורד למרכז מעגל חוסם, ובמקרה זה למפגש אלכסוני הריבוע,

הרי שכיוון שהאלכסונים חוצים זה את זה, אז M **הוא מרכז המעגל החוסם, ו-** SM **הוא גובה הפירמידה,**

ובפרט מאונך גם ל- AC **.**

תשובה: הוכח.

(3) נראה כי SM **הוא גובה הפירמידה.**

למעשה הוסבר כבר בתת-סעיף א(2).

M **הוא מרכז המעגל החוסם את בסיס הפירמידה, ולכן** SM **הוא גובה הפירמידה.**

תשובה: הוכח.

ב. נתון: $A(\sqrt{3},1,0)$ **,** $C(-\sqrt{3},-1,0)$ **.**

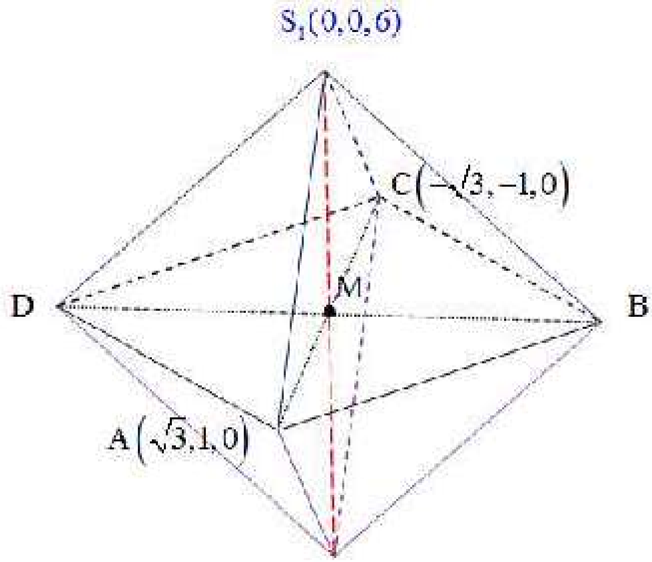
D **ו-** B **נמצאות במישור** $z=0$ **, כלומר כל בסיס הפירמידה במישור זה (כי גם** $z_A=z_C=0$ **).**

ולכן הנורמל למישור יהיה מקביל לישר $z=0$, **או** $z=0$ **בעצמו.**

(1) נשתמש בנוסחת אמצע קטע (M **הוא אמצע** AC **).**

$$M(\frac{\sqrt{3}+(-\sqrt{3})}{2},\frac{1+(-1)}{2},\frac{0+0}{2})=M(0,0,0)$$

תשובה: $M(0,0,0)$ **(ראשית הצירים) .**



(2) נפח הפירמידה SABCD **הוא** 16**.**

$$\overrightarrow{AC}=\underline{C}-\underline{A}=\underline{x}=(-2\sqrt{3},-2,0)$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(-2)^2+0^2}=4$$

$$S_{ABCD}=\frac{4\cdot 4}{2}=8$$

$$16=\frac{8\cdot\left|\overrightarrow{SM}\right|}{3}$$

$$\left|\overrightarrow{SM}\right|=6$$

תשובה: $S_1(0,0,6)$, $S_2(0,0,-6)$ **.**

ג. (1) S_1MS_2 **מונח על ציר ה-** z **, לכן** $c=0$ **, ו-** $d=0$, **במשוואת המישור** AS_1S_2 **.**

$$\overrightarrow{MA}=\underline{A}-\underline{M}=\underline{x}=(\sqrt{3},1,0)$$

$$(a,b,0)\cdot(\sqrt{3},1,0)=0$$

$$a\sqrt{3}+b=0$$

$$a=1\quad\rightarrow b=-\sqrt{3}$$

תשובה: משוואת המישור AS_1S_2 **היא** $x-\sqrt{3}y=0$ **.**

(2) נקודה C **נמצאת במישור המשולש** AMS **, המוכל במישור** AS_1S_2 **ולכן גם היא נמצאת במישור.**

ניתן גם להציב את שיעוריה במשוואת המישור: $-\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot 1=0\quad\rightarrow 0=0\quad o.k.$

תשובה: נקודה C **נמצאת על המישור** AS_1S_2 **.**

א. נפתור את המשוואה $z^3=-1$.

$$z^3=1cis(180°)$$
$$z_K=\sqrt[3]{1}\,cis\left(\frac{180°}{3}+\frac{360°k}{3}\right)$$
$$z_K=cis(60°+120°k)$$
$$z_1=cis\,60°=0.5+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_2=cis\,180°=-1$$
$$z_3=cis\,300°=0.5-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

תשובה: $z_1=cis\,60°=0.5+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=cis\,180°=-1$ **,** $z_3=cis\,300°=0.5-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **.**

ב. (1) נראה ש- z_1 **,** z_2 **, ו-** z_3 **הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית.**

$$\frac{z_3}{z_2}=\frac{cis\,300°}{cis\,180°}=cis(300°-180°)=cis(120°)$$
$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{cis\,180°}{cis\,60°}=cis(180°-60°)=cis(120°)$$

מכאן ש- $\frac{z_3}{z_2}=\frac{z_2}{z_1}$, **ואלו שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית, שמנתה** $q=cis(120°)$ **.**

תשובה: הוכח.

(2) נמצא את z_5 **, בסדרה ההנדסית, שבה** $z_1=cis\,60°$ **ו-** $q=cis(120°)$ **.**

$$z_5=z_1q^4=cis\,60°\cdot(cis120)^4=cis\,60°\cdot(cis120°\cdot4)=cis\,60°\cdot(cis\,480°)$$
$$z_5=cis(60°+480°)=cis\,540°$$
$$\boxed{z_5=cis\,180°=-1}$$

תשובה: $z_5=cis\,180°=-1$ **.**

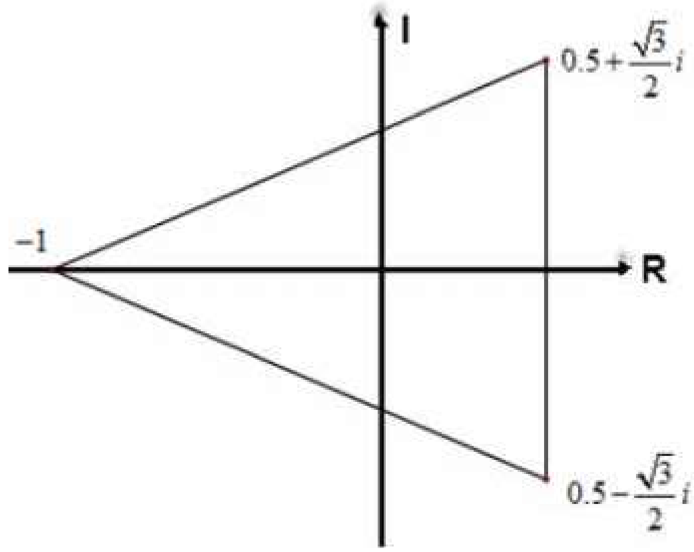
ג. (1) z_{13} **,** z_{14} **, ו-** z_{15} **הם קדקודי** ΔABC **שיש לחשב את שטח.**

נשים לב שקיימת מחזוריות בסדרה ההנדסית, כאשר לאחר שלושת האיברים הראשונים –

נקבל פעם נוספת את האיברים $cis\,60°$ **,** $cis\,180°$ **ו-** $cis\,300°$**.**

כי: $z_4 = z_3\,q = cis\,300° \cdot cis\,120° = cis\,420° = cis\,60°$ **וכן הלאה.**

נצייר את המשולש במישור גאוס, ללא רישום שמות הקדקודים.



$$S = \frac{\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - (-\frac{\sqrt{3}}{2})\right]\left[(0.5-(-1)\right]}{2}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}\cdot 1.5}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

תשובה: שטח ΔABC **הוא** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$**.**

(2) כפי שהוסבר בתת-סעיף ג' (1) , כל שלושה איברים עוקבים בסדרה z_n **הם:** $cis\,60°$ **,** $cis\,180°$ **ו-** $cis\,300°$**.**

לכן לא רק ש- ΔKLM **חופף ל-** ΔABC **, הוא גם מתלכד איתו.**

תשובה: הוכח.

4

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^{x^2}-2x}{e^{x^2}}$ **.**

(1) המכנה חיובי לכל x **.**

תשובה: תחום ההגדרה כל x **.**

(2) נמצא את נקודות הקיצון ונקבע את סוגן.

$$f'(x)=\frac{e^{x^2}(2x\cdot e^{x^2}-2)-(e^{x^2}-2x)\cdot 2x\cdot e^{x^2}}{(e^{x^2})^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^{x^2}\left[2x\cdot e^{x^2}-2-2x(e^{x^2}-2x)\right]}{(e^{x^2})^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot e^{x^2}-2-2xe^{x^2}+4x^2}{e^{x^2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{4x^2-2}{e^{x^2}}}$$

$$0=4x^2-2$$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

או:

$$f(x)=\frac{e^{x^2}-2x}{e^{x^2}}=1-\frac{2x}{e^{x^2}}$$

$$f'(x)=-\frac{2e^{x^2}-2x\cdot 2x\cdot e^{x^2}}{(e^{x^2})^2}$$

$$f'(x)=-\frac{2e^{x^2}(1-2x^2)}{(e^{x^2})^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2(2x^2-1)}{e^{x^2}}}$$

מונה הנגזרת ($4x^2-2$ **) הוא של פרבולה בעלת מינימום (המכנה חיובי).**

לכן הנגזרת חיובית עבור $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ **או** $x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ **והפונקציה עולה בתחומים אלו,**

והנגזרת שלילית עבור $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ **, והפונקציה יורדת בתחום זה.**

בהתאם נקבע את סוג נקודות הקיצון.

תשובה: $(\frac{1}{\sqrt{2}},0.142)$ **מינימום ,** $(-\frac{1}{\sqrt{2}},1.858)$ **מקסימום.**

(3) תשובה: עלייה: $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ **או** $x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ **, ירידה** $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ **.**

(4) ניעזר בתבנית הפונקציה $f(x)=1-\frac{2x}{e^{x^2}}$, למציאת אסימפטוטה אופקית.

נציב $x=4$ ונקבל 1.0000009, כלומר שאיפה ל- $y=1$, מלמעלה.

נציב $x=-4$ ונקבל 0.999999 , כלומר שאיפה ל- $y=1$, מלמטה.

או הסבר מעמיק יותר (ולא נדרש בבגרות):

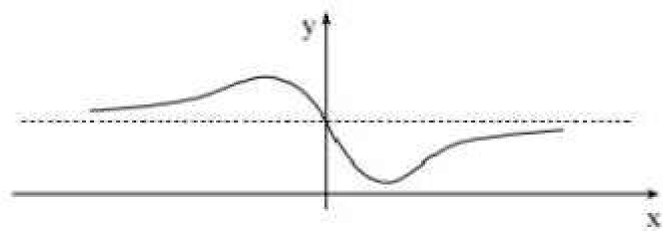
הביטוי e^{x^2} שבמכנה המחובר הימני שואף לאינסוף, כאשר $x\to\pm\infty$, מהר יותר מהביטוי $2x$ שבמונה,

לכן המחובר הימני שואף לאפס, כאשר $x\to\pm\infty$ - והפונקציה כולה $f(x)\to 1$.

אין אסימפטוטה אנכית, כי הפונקציה מוגדרת לכל x .

תשובה: $y=1$ אסימפטוטה אופקית.

(5) הסקיצה המתאימה של $f(x)=\frac{e^{x^2}-2x}{e^{x^2}}$.



ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

(1) המכנה חיובי לכל x , על פי הסקיצה של $f(x)$, בתת-סעיף א(5) .

ולכן $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ מוגדרת לכל x .

תשובה: הוכח.

(2) נמצא את נקודות הקיצון ונקבע את סוגן.

$\boxed{g'(x)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}}$ **, כלומר הנגזרת מתאפסת כאשר** $f'(x)=0$ **, אולם סימנה משתנה,**

ובהתאם מתחלפים תחומי העלייה והירידה, סוג נקודות הקיצון,

ושיעור ה- y **של נקודות הקיצון מתהפך –**

$$g(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{f(\frac{1}{\sqrt{2}})}=\frac{1}{0.142}=7.131 \quad , \quad g(-\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{f(-\frac{1}{\sqrt{2}})}=\frac{1}{1.858}=0.538 \, .$$

תשובה: $(\frac{1}{\sqrt{2}},7.131)$ **מקסימום ,** $(-\frac{1}{\sqrt{2}},0.538)$ **מינימום.**

(3) תשובה: ירידה: $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ **או** $x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ **, עלייה** $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ **.**

(4) הראינו בתת-סעיף א(4) ש- כאשר $x\to\pm\infty$ **, אז** $f(x)\to 1$

בהתאם, כאשר $x\to\pm\infty$ **, אז** $g(x)\to\frac{1}{1}=1$ **.**

גם כאן ניתן להציב:

נציב $x=4$ **ונקבל** 0.999999 **, כלומר שאיפה ל-** $y=1$ **, מלמטה.**

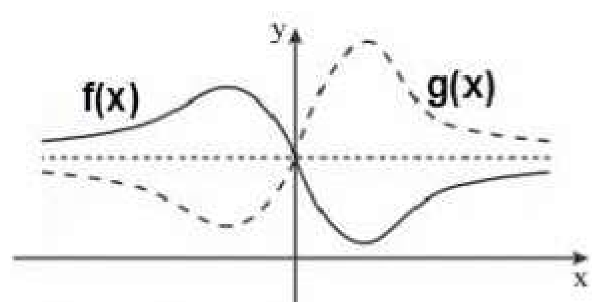
נציב $x=-4$ **ונקבל** 1.0000009 **, כלומר שאיפה ל-** $y=1$ **, מלמעלה.**

תשובה: $y=1$ **אסימפטוטה אופקית.**

(5) הסקיצה המתאימה של $f(x)=\frac{e^{x^2}-2x}{e^{x^2}}$ **ושל** $g(x)$ **.**

נשים גם לב ששני הגרפים נחתכים כאשר $y=1$ **, וזה קורה על ציר ה-** y **.**

(כאשר מציירים גרפים, טוב למצוא נקודת חיתוך עם ציר ה- y **, אם קיימת.)**



5

א. נתונה הפונקציה $h(x)=\dfrac{x+3}{x}$.

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x\neq 0$.

ב. נמצא את התחום שבו $h(x)>0$.

$$\frac{x+3}{x}>0 \quad /\cdot x^2>0$$
$$x(x+3)>0$$

קבלנו באגף שמאל ביטוי ריבועי, שמתואר על ידי פרבולה בעלת מינימום,

שחיובית עבור $x>0$ **או** $x<-3$.

תשובה: $x>0$ **או** $x<-3$.

ג. נמצא את הפונקציה $f(x)$.

בתחום שבו $h(x)>0$ **(כלומר בתחום** $x>0$ **או** $x<-3$ **) נתון כי** $f'(x)=\dfrac{h'(x)}{h(x)}$.

נמצא את הפונקציה הקדומה, את $f(x)$ **, על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית.**

$$f(x)=\int\frac{h'(x)}{h(x)}\,dx$$
$$f(x)=\int\frac{1}{h(x)}\cdot h'(x)\,dx$$
$$f(x)=\ell n\left|h(x)\right|+c$$
$$f(x)=\ell n\, h(x)+c \quad \leftarrow h(x)>0$$
$$f(x)=\ell n\frac{x+3}{x}+c$$

נציב את הנקודה $(3,\ell n 2)$ **, הנמצאת על גרף הפונקציה** $f(x)$.

$$\ell n 2=\ell n\left(\frac{3+3}{3}\right)+c$$
$$\ell n 2=\ell n 2+c$$
$$c=0$$
$$\boxed{f(x)=\ell n\left(\frac{x+3}{x}\right)}$$

תשובה: $f(x)=\ell n\left(\dfrac{x+3}{x}\right)$.

ד. למציאת האסימפטוטות של $f(x)=\ell n(\frac{x+3}{x})$ המקבילות לצירים, נציב ערכים מתאימים.

נציב $x=0.000001$ **ונקבל** 17.21**, כלומר שאיפה ל-** $+\infty$**, ו-** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

נציב $x=-3.000001$ **ונקבל** -17.21 **, כלומר שאיפה ל-** $-\infty$**, ו-** $x=-3$ **אסימפטוטה אנכית.**

נציב $x=1000000$ **ונקבל** $2.99\cdot10^{-6}$**, כלומר שאיפה ל-** $y=0$ **, מלמעלה, ו-**$y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

נציב $x=-1000000$ **ונקבל** $-3\cdot10^{-6}$**, כלומר שאיפה ל-** $y=0$ **, מלמטה, ו-**$y=0$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל.**

ניתן גם להבין שהביטוי $\frac{x+3}{x}$ **שואף ל-** 1**, כאשר** $x\to\pm\infty$ **ולכן הפונקציה שואפת ל-** $\ell n1=0$ **.**

תשובה: $x=0$ **,** $x=-3$ **,** $y=0$ **.**

ה. נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$f(x)=\ell n(\frac{x+3}{x})$$

$$f'(x)=\frac{\frac{x-(x+3)}{x^2}}{\frac{x+3}{x}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-3}{x^2\cdot\frac{x+3}{x}}}$$

המכנה חיובי בתחום ההגדרה, והמונה שלילי.

בהתאם, הנגזרת שלילית עבור $x>0$ **או** $x<-3$ **. והפונקציה יורדת בתחום זה.**

תשובה: ירידה: $x>0$ **או** $x<-3$**, עלייה – אף** x **.**

ו. הסקיצה המתאימה של $f(x)$ **.**