א. נתונות הנקודות $A(-3a,0)$ **ו-** $B(3,0)$ **(** $a>0$ **פרמטר), כאשר** $\frac{PA}{PB}=1 \leftarrow PA=PB$ **.**

כל הנקודות P **הנמצאות במרחק שווה מקצות הקטע** AB **, נמצאות על האנך האמצעי לקטע.**

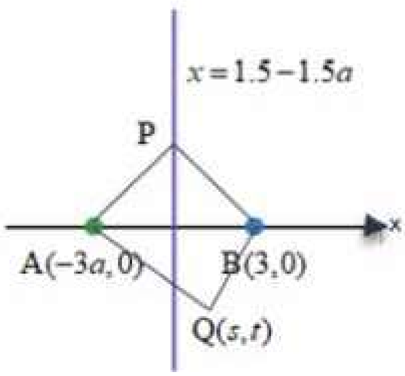
לכן, $x=\frac{3+(-3a)}{2} \leftarrow x=1.5-1.5a$ **, ישר המאונך לציר ה-** x $(y=0)$ **.**

(הערה – כל עוד לא ידוע ערכו של a **, לא ניתן למקם את ציר ה-** y **בציור.)**

תשובה: $x=1.5-1.5a$ **הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות** P **, המקיימות** $\frac{PA}{PB}=1$ **.**

ב. נסמן $Q(s,t)$ **נקודה על המקום הגיאומטרי,**

כאשר $\frac{QA}{QB}=2 \leftarrow QA=2QB$ **.**



$$\sqrt{(s+3a)^2+(t-0)^2}=2\sqrt{(s-3)^2+(t-0)^2} \quad /(\,)^2$$
$$s^2+6as+9a^2+t^2=4(s^2-6s+9+t^2)$$
$$s^2+6as+9a^2+t^2=4s^2-24s+36+4t^2$$
$$9a^2-36=3s^2-24s-6as+3t^2 \quad /:3$$
$$3a^2-12=s^2-8s-2as+t^2$$
$$3a^2-12=s^2-2(4+a)s+t^2$$
$$3a^2-12+(4+a)^2=(s-(4+a))^2+t^2$$
$$3a^2-12+16+8a+a^2=(s-(4+a))^2+t^2$$
$$4a^2+8a+4=(s-(4+a))^2+t^2$$
$$4(a^2+2a+1)^2=(s-(4+a))^2+t^2$$
$$4(a+1)^2=(s-(4+a))^2+t^2$$
$$\boxed{(x-(4+a))^2+y^2=4(a+1)^2}$$

וזהו מעגל שמרכזו $(4+a,0)$ **ורדיוסו** $2(a+1)$ **.**

תשובה: המקום הגיאומטרי של כל הנקודות , המקיימות $\frac{QA}{QB}=2$ **,**

הוא המעגל $(x-(4+a))^2+y^2=4(a+1)^2$ **, שמרכזו** $(4+a,0)$ **ורדיוסו** $2(a+1)$ **.**

ג. (1) המעגלים החדשים משיקים לישר , $x=1.5-1.5a$, ולכן מרחק המרכז ממנו שווה לרדיוס שלהם.

המעגלים החדשים עוברים דרך הנקודה $(4+a,0)$, ולכן מרחק המרכז ממנה שווה גם הוא לרדיוס שלהם.

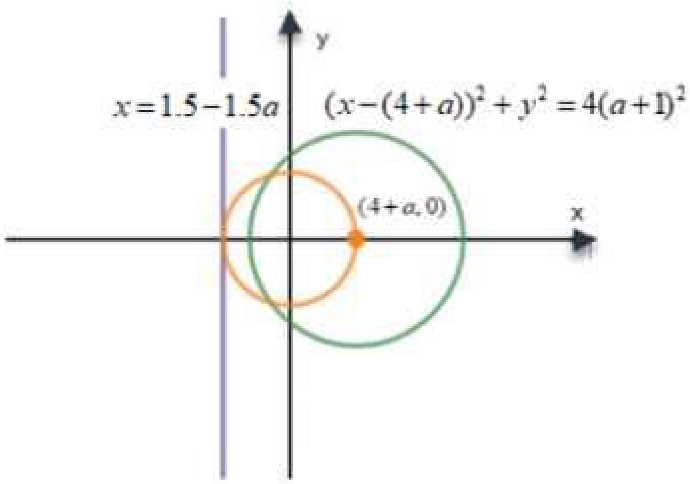
המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, אשר מרחקן מישר ($x=1.5-1.5a$, המדריך),

שווה למרחקן מנקודה קבועה ($(4+a,0)$) - הוא פרבולה.

תשובה: המקום הגיאומטרי הוא פרבולה.

(2) כיוון שנתון כי המקום הגיאומטרי עובר דרך ראשית הצירים,

אז הנקודה $(0,0)$ נמצאת על המקום הגיאומטרי, ולכן:



$$0-(1.5-1.5a)=a+4-0$$
$$-1.5+1.5a=a+4$$
$$0.5a=5.5$$
$$\boxed{a=11}$$

המוקד הוא $(4+11,0)=(15,0)$,

והמדריך הוא $x=-15$.

$$\frac{p}{2}=15$$
$$p=30$$

ומשוואת הפרבולה היא $y^2=60x$.

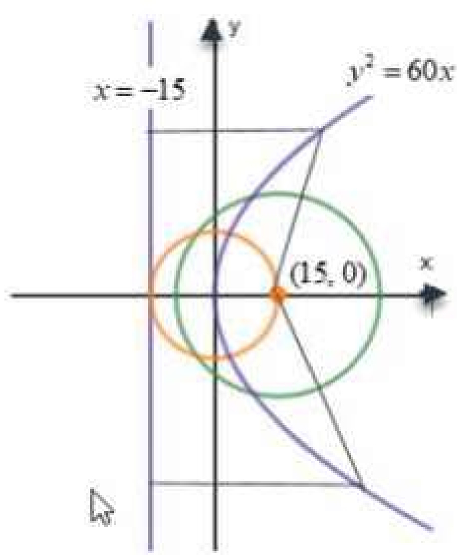
תשובה: $a=11$.

המקום הגיאומטרי של המעגלים המשיקים לישר $x=1.5-1.5a$, ועוברים דרך הנקודה $(4+a,0)$,

הוא הפרבולה $y^2=60x$.

להלן הציור המתאים (העשרה).

ניתן לשים לב, שכל הנקודות על הפרבולה – נמצאות במרחק שווה מהמוקד ומהמדריך.



א. נתונה התיבה $ABCDA'B'C'D'$ **ששלושה ממקצועותיה, המאונכים זה לזה, מונחים על הצירים.**

על פי הנתונים:

$A(4,0,0)$ **,** $B(4,a,0)$ **,** $C(0,a,0)$ **,** $D(0,0,0)$ **,** $N(0,5,0)$**.**

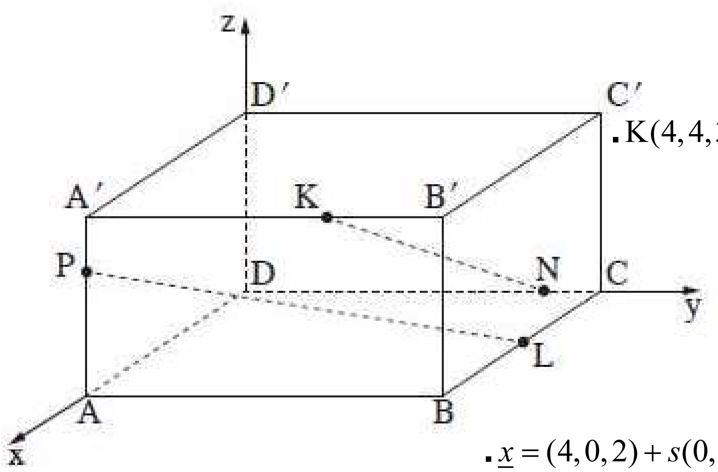
$A'(4,0,3)$ **,** $B'(4,a,3)$ **,** $C'(0,a,3)$ **,** $D'(0,0,3)$**.**

$a>0$ **, ולמעשה לאור שיעורי הנקודה** $N(0,5,0)$**, הנמצאת על המקצוע** DC**, מתקבל ש:** $a>5$ **.**

$AP=2PA'$**, ובהתאם** $P(4,0,2)$**.**

L **אמצע המקצוע** BC**, ובהתאם** $L(2,a,0)$**.**

$\overrightarrow{A'K}=\frac{4}{5}\overrightarrow{A'K}=\frac{4}{5}\cdot\underline{(0,5,0)}=\underline{x}=(0,4,0)$**, ובהתאם** $K(4,4,3)$**.**



נמצא את ההצגה הפרמטרית של המישור PNK

ולאחר מכן את משוואת המישור.

$$\overrightarrow{PK}=\underline{K}-\underline{P}=\underline{x}=(0,4,1)$$
$$\overrightarrow{PN}=\underline{N}-\underline{P}=\underline{x}=(-4,5,-2)$$

ההצגה הפרמטרית של המישור היא: $\underline{x}=(4,0,2)+s(0,4,1)+t(-4,5,-2)$**.**

$$\left.\begin{array}{l}(a,b,c)\cdot(0,4,1)=0\quad\rightarrow 4b+c=0\quad\rightarrow b=1,c=-4\\(a,b,c)\cdot(-4,5,-2)=0\quad\rightarrow -4a+5b-2c\quad\rightarrow 5-2(-4)=4a\quad\rightarrow a=\frac{13}{4}\end{array}\right\}\cdot 4\rightarrow a=13,b=4,c=-16$$

משוואת המישור PNK **היא:** $13x+4y-16z+d=0$**. נציב** $K(4,4,3)$ **ונקבל ש-** $d=-20$ **.**

תשובה: משוואת המישור PNK **היא:** $13x+4y-16z-20=0$**.**

ב. (1) $\overrightarrow{NK}=\underline{K}-\underline{N}=\underline{x}=(4,-1,3)\ \rightarrow\ l_{NK}:\underline{x}=(0,5,0)+t(4,-1,3)$

$\overrightarrow{PL}=\underline{L}-\underline{P}=\underline{x}=(-2,a,-2)\ \rightarrow\ l_{PL}:\underline{x}=(4,0,2)+s(-2,a,-2)$

תשובה: $l_{NK}:\underline{x}=(0,5,0)+t(4,-1,3)$ **,** $l_{PL}:\underline{x}=(4,0,2)+s(-2,a,-2)$ **.**

(2) קל לראות שלא קיים p , **עבורו** $p(-2,a,-2)=(4,-1,3)$ **, ולכן הישרים נחתכים או מצטלבים.**

נציב את שיעורי $L(2,a,0)$ **במשוואת המישור** PNK**.**

$13\cdot 2+4a-0-20=0$**. נקבל** $a=-1.5$**. אולם, נתון כי** $a>0$**, כלומר הישרים לא באותו מישור,**

ולכן והישרים מצטלבים.

תשובה: הוכחנו.

ג. (1) $\overrightarrow{C'P} = \underline{P} - \underline{C'} = \underline{x} = (4, -a, -1)$

$\overrightarrow{C'C} = \underline{C} - \underline{C'} = \underline{x} = (0,0,3)$

$$\cos \sphericalangle PC'C = \frac{\overrightarrow{C'P} \cdot \overrightarrow{C'C}}{\left|\overrightarrow{C'P}\right| \cdot \left|\overrightarrow{C'C}\right|}$$

$$\cos 82.1° = \frac{(4, -a, 1) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{4^2 + a^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}}$$

$$\cos 82.1° \cdot \sqrt{a^2 + 17} = 1$$

$$\sqrt{a^2 + 17} = \frac{1}{\cos 82.1°}$$

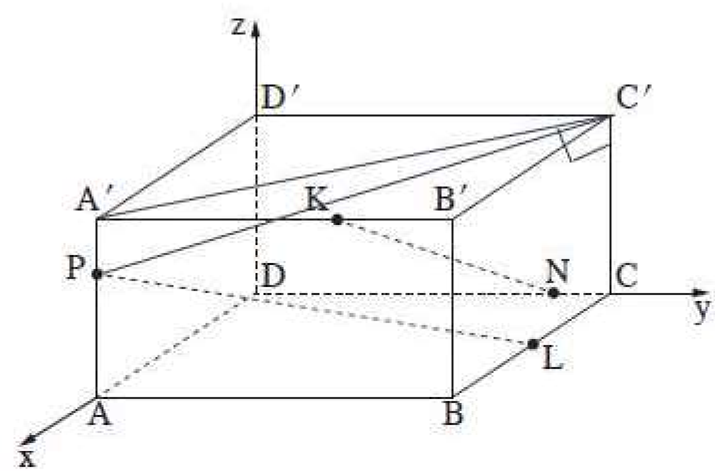
$$a^2 + 17 = 7.2757^2$$

$$a^2 = 35.935$$

$$\boxed{a = 5.99} \quad \leftarrow a > 5$$

תשובה: $a = 5.99$ **.**

(2) נביט במלבן $ACC'A'$ **, שהנקודה** P **נמצאת על הצלע** AA' **שלו.**



כיוון ש- $\sphericalangle A'C'C = 90°$ **, הרי ש-** $\sphericalangle PC'C < 90°$ **.**

תשובה: לא קיים a **, שעבורו** $\sphericalangle PC'C = 90°$ **.**

א. נתון כי $|z_1| = |z_2| = r$ **,** $\arg z_1 + \arg z_2 = 90°$ **.**

נסמן: $A: r\,cis\,\theta$ **,** $B: r\,cis\,(90° - \theta)$ **.**

$$z_1 \cdot z_2 = r\,cis\,\theta \cdot r\,cis\,(90° - \theta)$$
$$z_1 \cdot z_2 = r^2 cis\,(\theta + 90° - \theta)$$
$$z_1 \cdot z_2 = r^2 cis\,90°$$
$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r^2\,i}$$

תשובה: הוכחנו, $z_1 \cdot z_2 = r^2\,i$ **הוא מספר מדומה טהור .**

ב. נראה ש- ΔABC **שווה שוקיים, על ידי שנוכיח שהישר** $y = x$ **הוא אנך אמצעי לצלע** AB **,**

ואז מתקבל שהגובה לצלע זו מתלכד עם התיכון.

$$B: r\,cis\,(90° - \theta) = r(\cos(90° - \theta) + i\sin(90° - \theta))$$
$$\to B: r(\sin\theta + i\cos\theta)$$

נסמן: $A(x_A, y_A)$ **, ובהתאם** $B(y_A, x_A)$ **.**

שיעורי אמצע הצלע AB **הם :** $(\frac{x_A + y_A}{2}, \frac{x_A + y_A}{2})$ **, לכן הם נמצאים על הישר** $y = x$ **.**

שיפוע הצלע AB **הוא :** $m_{AB} = \frac{y_A - x_A}{x_A - y_A} = -1$ **, ולכן הצלע מאונכת לישר** $y = x$ **, ששיפועו** 1**.**

תשובה: ΔABC **שווה שוקיים, כי הקדקוד** C **נמצא על האנך האמצעי לצלע** AB **.**

ג. (1) $D: \ z_3 \cdot (z_1 \cdot z_2)^2 = z_3 \cdot (r^2 i)^2 = -r^4 z_3$ **.**

$$+\begin{cases} z_1 + z_2 = 7 + 7i \\ z_1 - z_2 = 1 - i \end{cases}$$

$$2z_1 = 8 + 6i$$

$$\boxed{z_1 = 4 + 3i} \quad \rightarrow \boxed{z_2 = 3 + 4i}$$

$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ **, ובהתאם:** $D: \ -625\ z_3$ **.**

$z_3^{\ 2} = 2i = 2cis\ 90°$ **. ועל פי נוסחת השורשים של מספרים מרוכבים:** $(z_3)_K = \sqrt{2}\ cis\ (45° + 180° k)$ **.**

עבור $k = 0$ **:** $\boxed{C(1,1)} \leftarrow z_3 = \sqrt{2}\ cis\ 45° = 1 + i$ **,** $\boxed{D(-625,-625)} \leftarrow D: \ -625\,(1+i)$

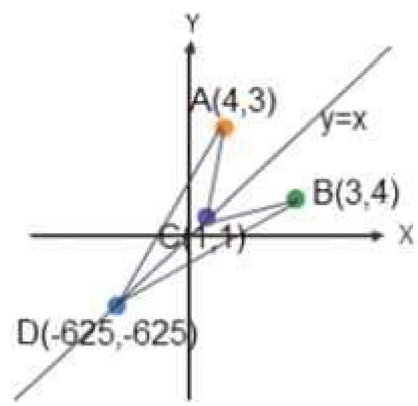
עבור $k = 1$ **:** $\boxed{C(-1,-1)} \leftarrow z_3 = \sqrt{2}\ cis\ 225° = -1 - i$ **,** $\boxed{D(625,625)} \leftarrow D: \ -625\,(-1-i)$

תשובה: $C(1,1)$ **,** $D(-625,-625)$ **, או** $C(-1,-1)$ **,** $D(625,625)$ **.**

(2) עבור $C(1,1)$ **, שברביע הראשון, נקבל דלתון קעור** $BDAC$ **.**

המרובע הוא דלתון, כי הנקודות $C(1,1)$ **ו-** $D(-625,-625)$ **נמצאות על הישר** $y = x$ **,**

שכפי שהראינו הוא האנך האמצעי לקטע AB **, ולכן מתקבלים שני זוגות שונים של צלעות סמוכות שוות.**



הערה – אין צורך להוכיח שהמרובע הא דלתון.

שטחו של כל מרובע, שאלכסוניו מאונכים זה לזה, הוא חצי מכפלת האלכסונים.

$$CD = \sqrt{(1-(-625))^2 + (1-(-625))^2} = \sqrt{783752}$$

$$AB = \sqrt{(4-3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}$$

$$S_{BDAC} = \frac{CD \cdot AB}{2} = \frac{\sqrt{783752} \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{S_{BDAC} = 626}$$

תשובה: $S_{BDAC} = 626$ **.**

א. נתונה משפחת הפונקציות $f(x)=e^{2mx}-e^{mx}$ ($m>0$, פרמטר).

(1) תשובה: תחום ההגדרה כל x .

(2) נמצא את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציות עם הצירים.

$$f(0)=e^{2m\cdot 0}-e^{m\cdot 0}=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,0)}$$

$$0=e^{2mx}-e^{mx}$$

$$e^{mx}=e^{2mx}$$

$$mx=2mx \quad /:m>0$$

$$x=2x$$

$$x=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,0)}$$

תשובה: $(0,0)$ **.**

(3) נמצא את משוואות האסימפטוטות.

כאשר $x\rightarrow +\infty$ **,** $e^{x}\rightarrow +\infty$ **. עבור** $m>0$ **נקבל ש-** $e^{2mx}-e^{mx}=(e^{mx})^{2}-e^{mx}\rightarrow +\infty$ **ואין אסימפטוטה אופקית.**

כאשר $x\rightarrow -\infty$ **,** $e^{x}\rightarrow 0$ **. עבור** $m>0$ **נקבל ש-** $e^{2mx}-e^{mx}=\rightarrow 0-0=0$ **ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית.**

תשובה: $y=0$ **אסימפטוטה אופקית (לשמאל), כאשר** $x\rightarrow -\infty$ **.**

(הערה – תוכלו להציב לדוגמה $m=2$ **, ו-** $x=\pm 5$ **בפונקציה, ולהבין מתי יש אסימפטוטות אופקיות.)**

(4) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון, של משפחת הפונקציות) ונקבע את סוגן.

$$\boxed{f'(x)=2me^{2mx}-me^{mx}}$$

$$0=2me^{2mx}-me^{mx} \quad /:me^{mx}>0$$

$$0=2e^{mx}-1$$

$$e^{mx}=0.5$$

$$mx=\ell n\, 0.5$$

$$x=\frac{1}{m}\ell n\, 0.5$$

$$f(\frac{1}{m}\ell n\, 0.5)=e^{2\ell n\, 0.5}-e^{\ell n\, 0.5}=0.5^{2}-0.5=-0.25 \quad \rightarrow \boxed{(\frac{1}{m}\ell n\, 0.5,-0.25)}$$

$$\boxed{f''(x)=4m^{2}e^{2mx}-m^{2}e^{mx}}$$

$$f''(\frac{1}{m}\ell n\, 0.5)=4m^{2}\cdot 0.5^{2}-m^{2}\cdot 0.5=0.5m^{2}>0 \quad \rightarrow Min$$

תשובה: $(\frac{1}{m}\ell n\, 0.5,-0.25)$ **, מינימום.**

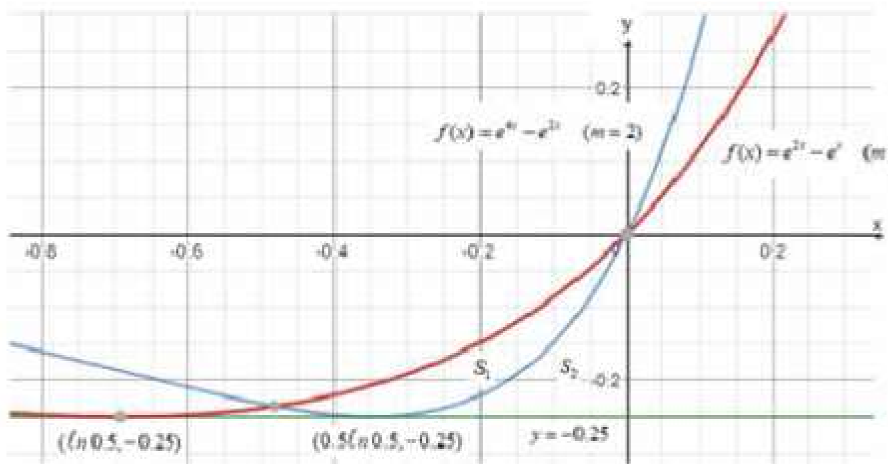
ב. נסרטט את הסרטוט המתאים, עבור $m=1$ ועבור $m=2$.

שיעורי נקודת המינימום, עבור $m=1$ הם $(\ell n\,0.5,-0.25)$.

שיעורי נקודת המינימום, עבור $m=2$ הם $(0.5\ell n\,0.5,-0.25)$, מימין לנקודת המינימום עבור $m=1$.

נשים לב ששיעורי ה- y קבועים, עבור כל $m>0$,

ונעביר כבר את הישר $y=-0.25$, המשיק בנקודות המינימום (עבור סעיף ג).



ג. (1) נחשב את S_{m} .

$$S_{\text{m}}=\int_{\frac{1}{m}\ell n\,0.5}^{0}(e^{2mx}-e^{mx}-(-0.25))\,dx$$

$$S_{\text{m}}=\int_{\frac{1}{m}\ell n\,0.5}^{0}(e^{2mx}-e^{mx}+0.25)\,dx$$

$$S_{\text{m}}=\frac{e^{2mx}}{2m}-\frac{e^{mx}}{m}+0.25x\ \Big]_{\frac{1}{m}\ell n\,0.5}^{0}$$

$$x=0\quad \frac{e^{2m\cdot 0}}{2m}-\frac{e^{m\cdot 0}}{m}+0.25\cdot 0=\frac{1}{2m}-\frac{1}{m}=-\frac{1}{2m}$$

$$x=\frac{1}{m}\ell n\,0.5\quad \frac{e^{2m\cdot\frac{1}{m}\ell n\,0.5}}{2m}-\frac{e^{m\cdot\frac{1}{m}\ell n\,0.5}}{m}+0.25\cdot\frac{1}{m}\ell n\,0.5=\frac{1}{8m}-\frac{1}{2m}=-\frac{3}{8m}+\frac{\ell n\,0.5}{4m}$$

$$S_{\text{m}}=-\frac{1}{2m}-(-\frac{3}{8m}+\frac{\ell n\,0.5}{4m})$$

$$\boxed{S_{\text{m}}=-\frac{1}{8m}-\frac{\ell n\,0.5}{4m}\sim\frac{0.0483}{m}}$$

תשובה: $S_{\text{m}}=-\frac{1}{8m}-\frac{\ell n\,0.5}{4m}\sim\frac{0.0483}{m}$.

(2)
$$\left.\begin{aligned}S_{\text{m}}&=-\frac{1}{8m}-\frac{\ell n\,0.5}{4m}=\frac{1-2\ell n\,0.5}{8m}\\ S_1&=\frac{1-2\ell n\,0.5}{8\cdot 1}=\frac{1-2\ell n\,0.5}{8}\end{aligned}\right\}\ \boxed{S_{\text{m}}=\frac{S_1}{m}}$$

תשובה: הוכחנו.

א. נתונה הפונקציה $g(x)=\ell n\,(f(x))$.

על פי גרף הפונקציה $g(x)$ **:**

$$0=\ell n\,(f(-2)) \quad \to f(-2)=e^0=1 \quad \to \boxed{f(-2)=1}$$

$g(-2)=0$ **. לכן,** $$1=\ell n\,(f(0)) \quad \to f(-2))=e^1=e \quad \to \boxed{f(0)=e}$$

$$0=\ell n\,(f(1)) \quad \to f(1)=e^0=1 \quad \to \boxed{f(1)=1}$$

תשובה: $f(-2)=1$ **,** $f(0)=e$ **,** $f(1)=1$ **.**

ב. $g(x)=\ell n\,(f(x))$ **, כלומר** $g(x)$ **מוגדרת כאשר** $f(x)$ **חיובית, ולכן התשובה מתוך תחום ההגדרה שבסרטוט.**

תשובה: $f(x)$ **חיובית עבור** $x>4$ **או** $x<2$ **.** $f(x)$ **שלילית עבור** $2<x<4$ **.**

ג. על פי התשובה מסעיף א: $(0,e)$ **היא נקודת החיתוך עם ציר ה-** y **.**

על פי סעיף ב, והעובדה ש- $f(x)$ **רציפה – הרי שנקודת החיתוך עם ציר ה-** x **הן:** $(2,0)$ **ו-** $(4,0)$**.**

תשובה: $(0,e)$ **,** $(2,0)$ **,** $(4,0)$**.**

ד. על פי הגרף שבסרטוט הנתון:

כאשר $x\to+\infty$ **,** $g(x)\to 0$ **. לכן** $\ell n\,(f(x))\to 0$ **, ומכאן ש -** $f(x)\to 1$ **ו-** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית.**

כאשר $x\to-\infty$ **,** $g(x)\to 2$ **. לכן** $\ell n\,(f(x))\to 2$ **, ומכאן ש -** $f(x)\to e^2$ **ו-** $y=e^2$ **אסימפטוטה אופקית.**

תשובה: כאשר $x\to+\infty$ **,** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית. כאשר** $x\to-\infty$ **,** $y=e^2$ **אסימפטוטה אופקית.**

ה. על פי הגרף שבסרטוט הנתון :

$g(x)$ **יורדת עבור** $0<x<2$ **, או** $x<-2$ **. בתחומים אלו** $g'(x)>0$ **.**

$g(x)$ **עולה עבור** $x>4$ **, או** $-2<x<0$ **. בתחומים אלו** $g'(x)>0$ **.**

$g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ **, ומכאן** $f'(x)=g'(x)\cdot f(x)$ **, כמובן בתחום ההגדרה של** $g(x)$ **.**

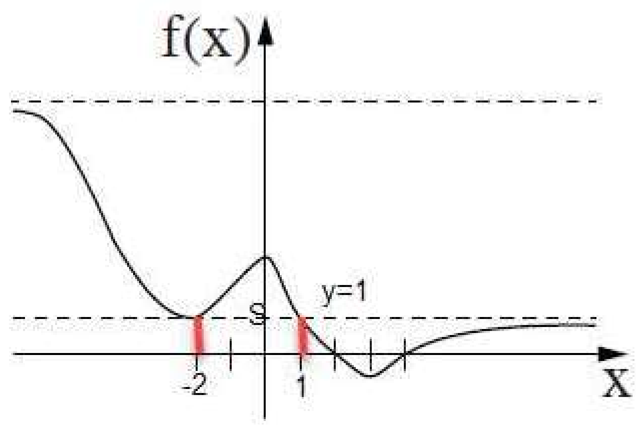
	$x>4$	$2<x<4$	$0<x<2$	$-2<x<0$	$x<-2$
סימני $g'(x)$	**+**	**לא מוגדרת**	**-**	**+**	**-**
סימני $f(x)$	**+**	**שלילית**	**+**	**+**	**+**
סימני $f'(x)$	**+**	**פתרון מחוץ לטבלה**	**-**	**+**	**-**
עלייה / ירידה $f(x)$	**עולה**		**יורדת**	**עולה**	**יורדת**

בתחום $2<x<4$ **:** $f(x)$ **שלילית, כאשר נתון כי** $f'(3)=0$ **, וגם מצאנו כי** $f(2)=f(4)=0$ **,**

לכן $x=3$ **מינימום, ו-** $f(x)$ **יורדת עבור** $2\le x\le 3$ **, ועולה עבור** $3\le x\le 4$

תשובה: תחום עלייה של $f(x)$ **:** $x\ge 3$ **, או** $-2\le x\le 0$ **. תחום ירידה של** $f(x)$ **:** $0\le x\le 3$ **, או** $x\le -2$ **.**

ו. סקיצה מתאימה (כולל סימון השטח עבור סעיף ז).



ז. $s=\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$ **הוא השטח, כפי שמסומן בציור, כי** $f(x)$ **חיובית בתחום זה.**

החלק התחתון של השטח הוא מלבן, שממדיו 3×1 **, ולכן גודלו שווה ל-** 3 **.**

מכאן ש- $s>3$ **, ובהתאם** $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx>3$ **.**

תשובה: הסברנו.