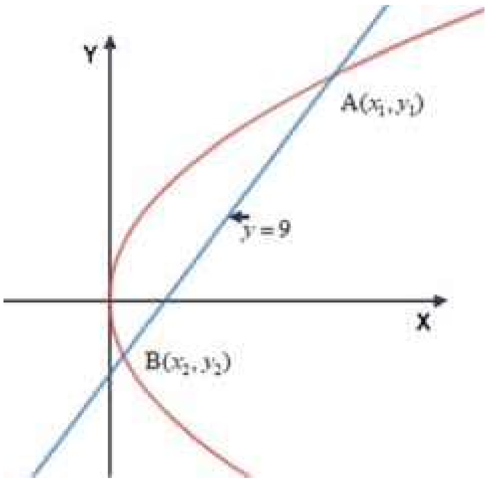
א. נתונות הנקודות $A(x_1,y_1)$ **ו-** $B(x_2,y_2)$ **, הנמצאות על הפרבולה** $y^2=2px$ **(** $p>0$ **פרמטר).**



$y=9$ **באמצע הקטע** AB **, ובהתאם:** $y_1+y_2=18 \quad \rightarrow \dfrac{y_1+y_2}{2}=9$ **.**

$m_A=\dfrac{4}{3}$ **, ובהתאם לנתון זה , ולמשוואה הראשונה שקבלנו,**

נביע את הנקודות באמצעות שיעורי ה- y **:** $A(\dfrac{y_1^2}{2p},y_1)$ **,** $B(\dfrac{y_2^2}{2p},y_2)$ **.**

$$\frac{4}{3}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{2p}-\frac{y_1^2}{2p}}$$

$$\frac{4}{3}(\frac{y_2^2}{2p}-\frac{y_1^2}{2p})=y_2-y_1$$

$$\frac{4}{3}(\frac{y_2^2-y_1^2}{2p})=y_2-y_1$$

$$4(y_2-y_1)(y_2+y_1)=6p(y_2-y_1) \quad /:(y_2-y_1)<0$$

$$4\cdot 18=6p \quad \leftarrow y_1+y_2=18$$

$$\boxed{p=12}$$

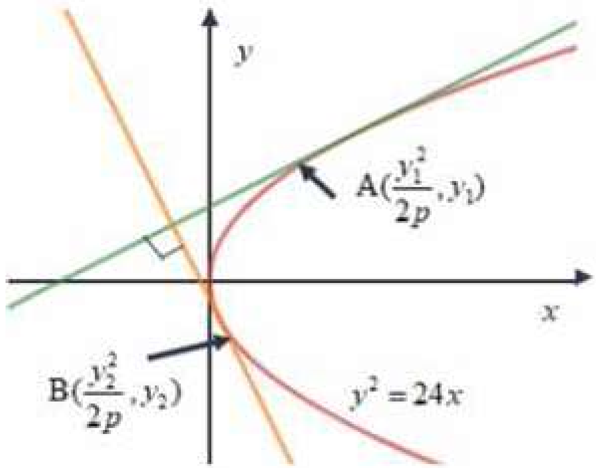
תשובה: משוואת הפרבולה היא $y^2=24x$ **.**

ב. נתון כי המשיקים לפרבולה, בנקודות $A(\frac{y_1^2}{2p},y_1)$ **ו-** $B(\frac{y_2^2}{2p},y_2)$**,**

מאונכים זה לזה, ולכן $m_{(\text{mashik A})}m_{(\text{mashik B})}=-1$ **.**

משוואת משיק לפרבולה, מנקודה שעל הפרבולה,

היא $yy_0=p(x+x_0)$ **, ולכן** $m_{\text{mashik}}=\frac{p}{y_0}=\frac{12}{y_0}$ **.**



$$\frac{12}{y_2}\cdot\frac{12}{y_1}=-1$$
$$144=-y_2y_1$$
$$144=-y_2(18-y_2)$$
$$0=y_2^2-18y_2-144$$
$$\cancel{(y_2)_1=24}$$
$$(y_2)_2=-6\quad\to y_B=-6\quad\to\boxed{B(1.5,-6)},\boxed{A(24,24)}$$

נתון כי הנקודה $A(x_1,y_1)$ **נמצאת ברביע הראשון, ולכן הנקודה** $B(x_2,y_2)$ **נמצאת ברביע הרביעי.**

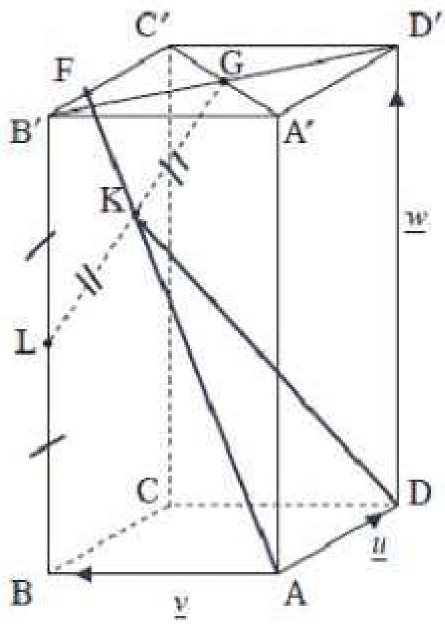
תשובה $A(24,24)$ **,** $B(1.5,-6)$ **.**

ג. זוג נקודות נוסף, למשל על פי הסימטריה לציר ה- x**, הוא:** $(24,-6)$ **ו-** $(1.5,24)$**.**

למעשה, מהתנאי שהמשיקים מאונכים זה לזה קבלנו ש: $144=-y_2y_1$**,**

ולכן יש אינסוף אפשרויות, כמו $(\frac{3}{8},-3)$ **ו-** $(96,48)$**.**

תשובה: למשל, $(24,-6)$ **ו-** $(1.5,24)$**.**



א. נתונה תיבה.

$\boxed{\overrightarrow{AD}=\underline{u}}$ $\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{v}}$ $\boxed{\overrightarrow{AA'}=\underline{w}}$

$$\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}+\frac{1}{2}\overrightarrow{LG}$$

$$\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{LB'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B'D'})$$

$$\overrightarrow{DK}=-\underline{u}+\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\underline{w}+\frac{1}{2}\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v})$$

$$\boxed{\overrightarrow{DK}=-\frac{3}{4}\underline{u}+\frac{3}{4}\underline{v}+\frac{3}{4}\underline{w}}$$

תשובה: $\overrightarrow{DK}=-\frac{3}{4}\underline{u}+\frac{3}{4}\underline{v}+\frac{3}{4}\underline{w}$.

ב. נראה כי K **נמצאת על האלכסון** DB'**, ונמצא את היחס** $\frac{DK}{DB'}$.

$$\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}$$

$$\boxed{\overrightarrow{DB'}=-\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}}$$

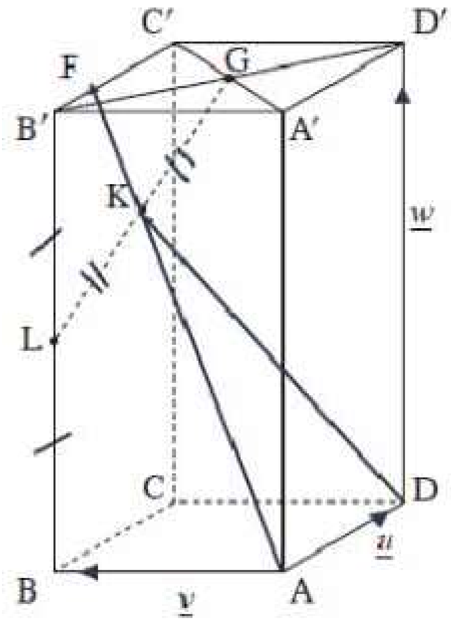
$$\boxed{\overrightarrow{DK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DB'}}$$

ולכן K **נמצאת על האלכסון** DB'**, כאשר** $\frac{DK}{DB'}=\frac{3}{4}$.

תשובה: הוכח ש- K **נמצאת על האלכסון** DB'**, והיחס הוא** $\frac{DK}{DB'}=\frac{3}{4}$.

ג. (1) $\overrightarrow{AF} = s\underline{u} + \underline{v} + t\underline{w}$.

KF **הוא המשך של** AK. **נראה כי** F **נמצאת על המקצוע** B'C'.



$$\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AK}$$

$$\overrightarrow{AF} = \alpha(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK})$$

$$\boxed{\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\alpha\underline{u} + \frac{3}{4}\alpha\underline{v} + \frac{3}{4}\alpha\underline{w}}$$

נבנה מערכת של שלוש משוואות, על-פי יחידות ההצגה של $\overrightarrow{AF}$.

$$(1) \quad \frac{1}{4}\alpha = s$$

$$(2) \quad \frac{3}{4}\alpha = 1 \quad \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{4}{3}} \quad \rightarrow (1),(2)\ \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3} = s \qquad \rightarrow \boxed{s = \frac{1}{3}}$$

$$(3) \quad \frac{3}{4}\alpha = t \quad \rightarrow (2),(3)\ \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3} = t \qquad \rightarrow \boxed{t = 1}$$

ובהתאם: $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$.

$$\overrightarrow{B'F} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}$$

$$\overrightarrow{B'F} = -\underline{w} - \underline{v} + \frac{1}{3}\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$$

$$\boxed{\overrightarrow{B'F} = \frac{1}{3}\underline{u}}$$

לכן, F **נמצאת על המקצוע** B'C'**, כי** $\overrightarrow{B'F}$ **מתחיל בקדקוד** B' **ו-** $\overrightarrow{B'F} = \frac{1}{3}\overrightarrow{B'C'}$.

או במילים אחרות, F **מחלקת את המקצוע** B'C' **ביחס** $B'F : B'C' = 1:2$.

תשובה: $s = \frac{1}{3}$ **,** $t = 1$ **, והוכח כי** F **נמצאת על המקצוע** B'C'.

(2) תשובה: $\frac{B'F}{B'C'} = \frac{1}{3}$

א. (1) נתון כי $|z_A|=|z_B|=|z_C|=\sqrt{65}$, כאשר הנקודה A נמצאת ברביע הראשון.

נמצא את z_A ואת z_B בשתי דרכים.

<u>הצגה טריגונומטרית / קוטבית</u>

נסמן: $z_A=\sqrt{65}\ cis\ \theta$ **, שמקיים את המשוואה** $(8-i)z=(8+i)\bar{z}$ **.**

$$\tan\theta=\frac{1}{8}$$
$$\theta=7.125^\circ+180^\circ k$$
$$\theta=7.125^\circ\quad\leftarrow 1st\ quadrant$$
$$R=\sqrt{8^2+1^2}=\sqrt{65}$$
$$8+i=\sqrt{65}\ cis\ 7.125^\circ$$

$$\tan\theta=\frac{-1}{8}=-\frac{1}{8}$$
$$\theta=-7.125^\circ+180^\circ k$$
$$\theta=-7.125^\circ\quad\leftarrow 4th\ quadrant$$
$$R=\sqrt{8^2+(-1)^2}=\sqrt{65}$$
$$8-i=\sqrt{65}\ cis\ (-7.125^\circ)$$

$$(8-i)(\sqrt{65}\ cis\ \theta)=(8+i)(\sqrt{65}\ cis)(-\theta))$$
$$\sqrt{65}\ cis\ (-7.125^\circ)\cdot\sqrt{65}\ cis\ \theta=\sqrt{65}\ cis\ (7.125^\circ)\cdot\sqrt{65}\ cis\ (-\theta)$$
$$cis\ 2\theta=cis\ 14.25^\circ$$
$$2\theta=14.25^\circ+360^\circ k$$
$$\theta=7.125^\circ+180^\circ k$$
$$z_A=\sqrt{65}\ cis\ 7.125^\circ=8+i$$
$$z_C=\sqrt{65}\ cis\ 187.125^\circ=-8-i$$

<u>הצגה אלגברית / קרטזית</u>

נסמן: $z_A=x+yi$ **, שמקיים את המשוואה** $(8-i)z=(8+i)\bar{z}$ **.**

$$(8-i)z=(8+i)\bar{z}$$
$$(8-i)(x+yi)=(8+i)(x-yi)$$
$$8x+8yi-xi+y=8x-8yi+xi+y$$
$$R:\quad 8x+y=8x+y\quad\rightarrow 0=0$$
$$I:\quad 8y-x=-8y+x\quad\rightarrow x=8y$$
$$|z_A|=\sqrt{65}$$
$$x^2+y^2=65$$
$$(8y)^2+y^2=65$$
$$y=\pm1$$
$$\boxed{z_A=8+i},\quad \boxed{z_C=-8-i}$$

תשובה: $z_A=8+i$ **,** $z_C=-8-i$ **.**

(2) $|z_A| = |z_B| = |z_C| = \sqrt{65}$ **, ולכן שלושת המספרים נמצאים על המעגל הקנוני** $x^2 +^2 = 65$ **.**

$z_A = 8+i$ **,** $z_C = -8-i$ **הם שני מספרים מנוגדים, מכאן שהראשית היא אמצע המיתר** AC **,**

ולכן AC **הוא קוטר.**

תשובה: $\sphericalangle ABC = 90°$ **, כי היא זווית היקפית, שנשענת על קוטר.**

ב. נמצא את z_B **.**

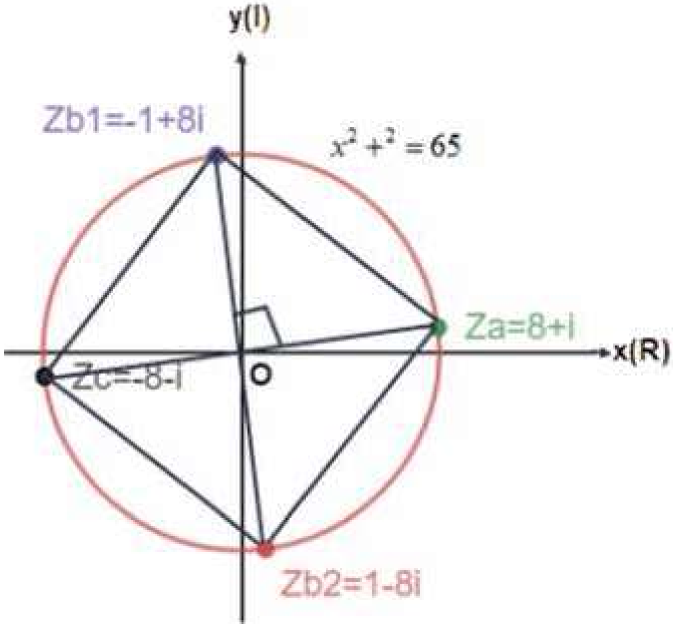
נתון כי $AB = BC$ **, ולכן** ΔABC **ישר זווית ושווה שוקיים.**

מכאן ש- BO **תיכון לבסיס במשולש שווה שוקיים, והוא גם גובה.**

$z_B = z_A \; cis\, 90° = (8+i)i = -1+8i$ **,**

או $z_B = z_A \; cis\, (-90°) = (8+i)(-i) = 1-8i$

תשובה: $z_B = -1+8i$ **, או** $z_B = 1-8i$ **.**



ג. a_n **היא סדרה הנדסית, שבה** $a_1 = z_A = 8+i$ **,**

ו- $a_2 = z_B = -1+8i$ **(שברביע השני),**

ולכן על-פי הסעיף הקודם, $q = cis\, 90° = i$ **.**

נוכיח שאם $S_m = 0$ **, אז** m **מתחלק ב-** 4 **ללא שארית.**

<u>הסבר אחד</u>

נוסחת הסכום לסדרה הנדסית היא $S_m = \dfrac{a_1(q^m - 1)}{q-1}$.

מכאן ש - $i^m = 1 \quad \leftarrow q^m - 1 = 0$ **, ולכן** $m = 4t$ **, כאשר** t **מספר טבעי.**

<u>הסבר שני</u>

ארבעת איברי הסדרה, הראשונים, הם קדקודי הריבוע שמצאנו בסעיף ב' וסכומם אפס.

לכן, סכומם של כל ארבעה איברים עוקבים (5-8, 9-12 וכדומה) בסדרה הוא אפס,

ולכן כל סכום של $m = 4t$ **איברים ראשונים בסדרה הנדסית זו הוא אפס.**

(למעשה, כל סכום של $4t$ **איברים עוקבים, בסדרה זו, הוא אפס.)**

תשובה: הוכחנו שאם $S_m = 0$ **, אז** m **מתחלק ב-** 4 **ללא שארית.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$ **.**

(1) נסמן: $g(x)=e^x-x$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה הוא כל x**.**

(2) נוכיח ש- : $e^x-x\ge 1$ **, כלומר ש-** 1 **הוא הערך המינימלי של** $g(x)$ **.**

$$\boxed{g'(x)=e^x-1}$$

$$e^x-1=0 \quad \to x=0$$

$$g''(x)=e^x>0 \quad \to x=0 \text{ min}$$

מכאן ש- $(0,1)$ **היא נקודת המינימום המוחלט של** $g(x)=e^x-x$ **.**

תשובה: $(0,1)$ **מינימום מוחלט של** $g(x)=e^x-x$ **, ולכן** $e^x-x\ge 1$ **.**

ב. (1) על פי תת-סעיף א(2), מכנה $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$ **חיובי לכל** x **.**

תשובה: תחום ההגדרה הוא כל x**.**

(2) נמצא את משוואות האסימפטוטות האופקיות, המקבילות לציר ה- x **(אין אסימפטוטות אנכיות).**

$f(10)=\dfrac{e^{10}-1}{e^{10}-10}=1.004$ **, ו-** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

$f(-10)=\dfrac{e^{10}-1}{e^{10}-(-10)}=-0.0999$ **, ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל.**

כאשר $x\to+\infty$ **,** $e^x\to+\infty$ **, מהר יותר מאשר** x **. לכן** $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}\to\dfrac{e^x}{e^x}=1$ **ו-** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית.**

כאשר $x\to-\infty$ **,** $e^x\to 0$ **. לכן** $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}\to\dfrac{0-1}{0-(-\infty)}=0^-$ **ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית.**

תשובה: $y=1$ **אסימפטוטה אופקית (לימין), כאשר** $x\to+\infty$ **.**

$y=0$ **אסימפטוטה אופקית (לשמאל), כאשר** $x\to-\infty$ **.**

(הערה – די בהצבות, ואפילו רק במסקנות, לתשובה מלאה בבגרות.)

(3) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$ **עם הצירים.**

$$x=0 \quad \to y=\frac{e^0-1}{e^0-0}=0 \quad \to \boxed{(0,0)}$$
$$y=0 \quad \to 0=\frac{e^x-1}{e^0-x}=0 \quad \to 0=e^x-1 \quad \to \boxed{(0,0)}$$

תשובה: $(0,0)$ **.**

(4) נחשב את $f'(x)$ **.**

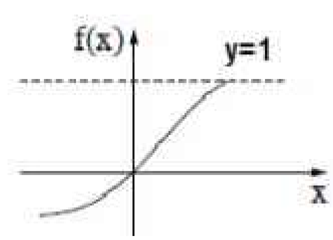
$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}$$
$$f'(x)=\frac{e^{2x}-xe^x-e^{2x}+e^x+e^x-1}{(e^x-x)^2}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{2e^x-xe^x-1}{(e^x-x)^2}}$$

תשובה: הוכחנו.

ג. נתון כי הביטוי $2e^x-xe^x-1$ **מוגדר לכל** x **, וחיובי בתחום** $-1\le x\le 1$ **,**
ולכן מונה הנגזרת חיובי, וגם המכנה, והפונקציה עולה בתחום זה.

(1) נחשב את ערכי הפונקציה בקצוות הקטע, ונשרטט סקיצה מתאימה, שבה הפונקציה עולה בקטע הנתון.

$$f(-1)=\frac{e^{-1}-1}{e^{-1}-(-1)}=\frac{\frac{1}{e}-1}{\frac{1}{e}+1}=\frac{1-e}{1+e}\sim -0.462$$
$$f(1)=\frac{e^1-1}{e^1-1}=1$$



תשובה: $f(-1)=\frac{1-e}{1+e}\sim -0.462$ **,** $f(1)=1$ **.**

(2) הראינו כי $f(10)=1.004$, כלומר גרף הפונקציה יגיע בירידה אל הישר $y=1$,

ולכן חייבת להיות נקודת מקסימום מקומי בקטע $-1<x\le 10$, כי הגרף עובר גם בראשית.

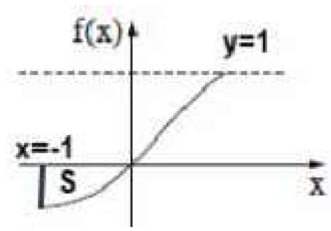
הראינו כי $f(-10)=-0.0999$, כלומר גרף הפונקציה מתחיל בירידה מהישר $y=0$,

וחייבת להיות נקודת מינימום אחת, בקטע $-10<x<0$, כי הגרף עובר בראשית הצירים.

(ייתכנו עוד זוגות של נקודות קיצון, בכל אחד מהקטעים שצוינו.)

תשובה: הסברנו מדוע יש לפחות שתי נקודות קיצון לפונקציה, בתחום ההגדרה הרחב שלה.

(3) נחשב את השטח המסומן בסרטוט הבא, על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית.



נציין כי מכיוון שהביטוי e^x-x חיובי, לא נדרש ערך מוחלט באינטגרל הבא.

$$S=\int_{-1}^{0}(0-\frac{e^x-1}{e^x-x})\,dx$$

$$S=\int_{-1}^{0}-\frac{1}{e^x-x}\cdot(e^x-1)\,dx$$

$$S=-\ell n\,(e^x-x)\Big]_{-1}^{0}$$

$$x=0 \quad -\ell n\,(e^0-0)=0$$

$$x=-1 \quad -\ell n\,(e^{-1}-(-1))=-\ell n\,(\frac{1}{e}+1)$$

$$\boxed{S=\ell n\,(\frac{1}{e}+1)\sim 0.3132}$$

תשובה: השטח המבוקש הוא $\ell n\,(\frac{1}{e}+1)\sim 0.3132$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\ell n\,(e^{2x}+b)$ **(** $b>0$ **הוא פרמטר).**

(1) הביטוי, שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית, הוא סכום של שני מחוברים חיוביים.

תשובה: תחום ההגדרה הוא כל x.

(2) $\boxed{f'(x)=\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+b}}$.

הן מונה הנגזרת, והן מכנה הנגזרת חיוביים, ולכן הנגזרת חיובית לכל x.

תשובה: הפונקציה עולה כל x**, הפונקציה יורדת לאף** x.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\ell n\,(e^{x}+be^{-x})$ **(** $b>0$ **הוא פרמטר).**

הביטוי, שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית, הוא סכום של שני מחוברים חיוביים.

תשובה: תחום ההגדרה הוא כל x.

ג. (1) נוכיח ש $f(x)-g(x)=x$.

$$\ell n\,(e^{2x}+b)-\ell n\,(e^{x}+be^{-x})=$$

$$=\ell n\frac{e^{2x}+b}{e^{x}+be^{-x}}==\ell n\frac{e^{2x}+b}{e^{x}+\frac{b}{e^{x}}}=$$

$$=\ell n\frac{e^{2x}+b}{\frac{e^{2x}+b}{e^{x}}}=\ell n e^{x}=x\ell n e=x$$

תשובה: הוכחנו ש- $f(x)-g(x)=x$.

(2) נמצא מתי $f(x)=g(x)$.

$$f(x)-g(x)=0$$

$$x=0\quad\rightarrow y=\ell n\,(e^{2\cdot 0}+b)=\ell n\,(1+b)$$

תשובה: שיעורי נקודת החיתוך של הגרפים הם $(0,\ \ell n\,(1+b))$.

ד. נתון כי נקודת המינימום של הפונקציה $g(x)$ נמצאת על האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$.

. $f(x)=\ell n\,(e^{2x}+b)$

כאשר $x\to+\infty$ **,** $e^{x}\to+\infty$ **, ואין אסימפטוטה אופקית.**

כאשר $x\to-\infty$ **,** $e^{2x}\to 0$ **. לכן** $f(x)\to\ell n\,(0+b)\to\ell n\,b$ **ו-** $y=\ell n\,b$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל.**

נמצא את נקודת המינימום של $g(x)=\ell n\,(e^{x}+be^{-x})$ **.**

$$\boxed{g'(x)=\frac{e^{x}-be^{-x}}{e^{x}+be^{-x}}}$$

$$0=e^{x}-be^{-x}$$

$$be^{-x}=e^{x}\quad /:e^{-x}>0$$

$$b=e^{2x}$$

$$2x=\ell n\,b$$

$$x=\frac{1}{2}\ell n\,b=\ell n\,b^{1/2}=\ell n\sqrt{b}$$

$$g(\ell n\sqrt{b})=\ell n\,(e^{\ell n\sqrt{b}}+be^{-\ell n\sqrt{b}})=\ell n\,(\sqrt{b}+\frac{b}{\sqrt{b}})=\ell n\,(2\sqrt{b})$$

ולכן $(\ell n\sqrt{b},\ell n\,2\sqrt{b})$ **היא נקודת המינימום.**

(נתון שיש נקודת מינימום, ולכן אין צורך לבדוק את קיומה ו/או את סוגה).

מכאן ש: $\ell n\,b=\ell n\,2\sqrt{b}$ **, כי נקודת המינימום של** $g(x)$ **נמצאת על האסימפטוטה של הפונקציה** $f(x)$ **.**

$$b=2\sqrt{b}\quad /:\sqrt{b}>0$$

$$\sqrt{b}=2$$

$$\boxed{b=4}$$

תשובה: $b=4$ **.**

ה. נסרטט סקיצה של שתי הפונקציות, באותה מערכת צירים.