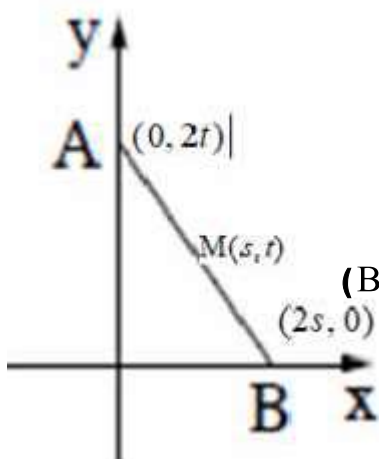


א. נסמן $M(s, t)$, נקודה על המקום הגיאומטרי.

$M(s, t)$ היא אמצע הקטע AB ולכן על פי נוסחת אמצע קטע:



$$\frac{0 + x_B}{2} = s \rightarrow x_B = 2s \rightarrow \boxed{B(2s, 0)}$$

$$\frac{y_A + 0}{2} = t \rightarrow y_A = 2t \rightarrow \boxed{A(0, 2t)}$$

$AB = 4$, לכן (ע"פ משפט פיתגורס $\triangle AOB$) מתקיים:

(הערך המוחלט נדרש כי לא ידוע על אילו צירים נמצאות הנקודות A ו-B)

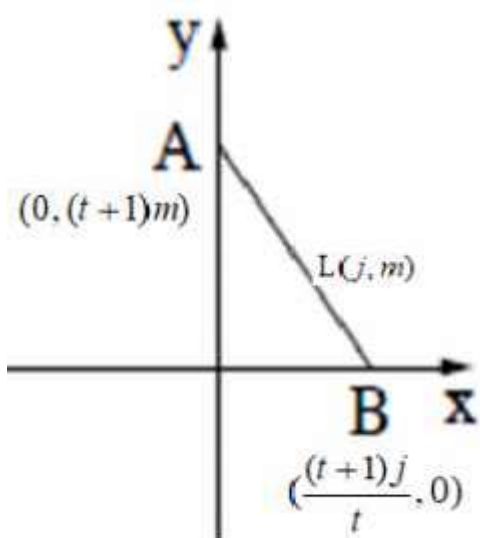
$$\cdot |2s|^2 + |2t|^2 = 4^2 \rightarrow 4s^2 + 4t^2 = 16 \rightarrow s^2 + t^2 = 4$$

קבלנו את המעגל הקנוני $x^2 + y^2 = 4$.

תשובה: המקום הגיאומטרי הוא המעגל $x^2 + y^2 = 4$, שמרכזו $(0, 0)$ ורדיוסו 2.

ב. נסמן $L(j, m)$, נקודה על המקום הגיאומטרי.

$L(j, m)$ על AB ומקיימת $\frac{AL}{LB} = \frac{t}{1}$, ולכן על פי נוסחת חלוקת קטע ביחס נתון:



$$\frac{0 + t x_B}{t+1} = j \rightarrow x_B = \frac{(t+1)j}{t} \rightarrow \boxed{B\left(\frac{(t+1)j}{t}, 0\right)}$$

$$\frac{y_A + 0}{t+1} = m \rightarrow y_A = (t+1)m \rightarrow \boxed{A(0, (t+1)m)}$$

$AB = 4$, לכן (ע"פ משפט פיתגורס $\triangle AOB$) מתקיים:

(הערך המוחלט נדרש כמו בסעיף א)

$$\left| \frac{(t+1)j}{t} \right|^2 + |(t+1)m|^2 = 4^2$$

$$\cdot \frac{(t+1)^2}{t^2} j^2 + (t+1)^2 m^2 = 16$$

$$\frac{(t+1)^2}{16t^2} j^2 + \frac{(t+1)^2}{16} m^2 = 1$$

קבלנו את האליפסה $\frac{(t+1)^2}{16t^2} x^2 + \frac{(t+1)^2}{16} y^2 = 1$

תשובה: המקום הגיאומטרי הוא האליפסה $\frac{(t+1)^2}{16t^2} x^2 + \frac{(t+1)^2}{16} y^2 = 1$, כאשר $a = \frac{4t}{t+1}$ ו- $b = \frac{4}{t+1}$.

ג. האליפסה תהייה מעגל, כאשר הנקודה $L(j, m)$ תהיה אמצע הקטע AB, ולכן $t = 1$.

או, נפתור על ידי חישוב. נדרש $a = b$ על-מנת שהאליפסה תהייה מעגל.

$$. b = \frac{4}{t+1} \text{ ו- } a = \frac{4t}{t+1}$$

$$\frac{4t}{t+1} = \frac{4}{t+1}$$

$$4t = 4$$

$$t = 1$$

נבדוק, על ידי הצבה.

$$\frac{(1+1)^2}{16 \cdot 1^2} x^2 + \frac{(1+1)^2}{16} y^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

תשובה: $t = 1$.

ד. המקום הגיאומטרי, שמצאנו בסעיף ב, הוא האליפסה $\frac{(t+1)^2}{16t^2} x^2 + \frac{(t+1)^2}{16} y^2 = 1$, כאשר $a = \frac{4t}{t+1}$.

נקודת החיתוך, עם הקרן החיובית של ציר ה- x , היא $(\frac{4t}{t+1}, 0)$.

נדרש שנקודת החיתוך תהייה $(5, 0)$.

$$\frac{4t}{t+1} = 5$$

$$. 4t = 5t + 5$$

$$\cancel{t > -5} \leftarrow t > 0$$

תשובה: לא קיים $t > 0$, שעבורו המקום הגיאומטרי, שמצאנו בסעיף ב, חותך את ציר ה- x בנקודה $(5, 0)$.

בגרות עט מאי 19 מועד קיץ א שאלון 35582

א. נתונה קובייה OBCDE שבסיסה ABCD הוא ריבוע, המונח על מישור $[x, y]$, שמשוואתו $z = 0$.

משוואת הבסיס העליון היא $z = 6$.

B ממוקמת בראשית הצירים, אורך צלע הקובייה הוא 6.

על פי נתונים אלו, ניתן לרשום את שיעורי קדקודי הקובייה:

$$A(6, 0, 0), B(0, 0, 0), C(0, 6, 0), D(6, 6, 0)$$

$$A'(6, 0, 6), B'(0, 0, 6), C'(0, 6, 6), D'(6, 6, 6)$$

נחשב את גודל הזווית שבין $A'C$ ובין הקטע BC' .

$$\overrightarrow{A'C} = \underline{C} - \underline{A'} = \underline{x} = (-6, 6, -6)$$

$$\overrightarrow{BC'} = \underline{C} - \underline{B} = \underline{x} = (0, 6, 6)$$

$$\cos \alpha = \frac{|(-1, 1, -1) \cdot (0, 1, 1)|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{0}{\sqrt{6}} \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

תשובה: הזווית שבין $A'C$ ובין הקטע BC' היא 90° .

ב. $BD \perp AC$ (אלכסוני הריבוע מאונכים זה לזה).

לכן $BD \perp A'C$ (על פי משפט שלושת האנכים).

או בפירוט: BD מאונך להיטל AC של AC' למישור, ולכן מאונך למשופע (AC') .

כמו כן $B'D \perp A'C$ (על פי סעיף א).

ולכן $A'C$ מאונך למישור $\pi_{BC'D}$ (מאונך לשני ישרים במישור, שאינם מקבילים).

תשובה: הוכחנו שהישר $A'C$ מאונך למישור $BC'D$.

ג. הנקודה K היא נקודת החיתוך של הישר A'C עם המישור BC'D.
 נמצא את משוואת המישור BC'D (שעובר בראשית הצירים, ולכן $d = 0$),
 ונציב בה נקודה טיפוסית שעל הישר A'C.

$$\overline{A'C} = \underline{x} = (-6, 6, -6), (a, b, c) = (1, -1, 1)$$

$$\pi_{BC'D}: x - y + z = 0 \text{ היא העובר בראשית,}$$

$$\ell_{\overline{A'C}} = \underline{x} = (6, 0, 6) + t(1, -1, 1) \text{ ונקודה טיפוסית עליו היא } (6+t, -t, 6+t).$$

$$6+t+t+6+t=0 \rightarrow t=-4 \rightarrow K(2, 4, 2) \text{ הנקודה הטיפוסית במשוואת המישור:}$$

כיוון שאנו יודעים ש-K נמצאת על A'C, ניתן למצוא את היחס המבוקש, על פי השתנות של אחד השיעורים.

$$\frac{A'K}{A'C} = \frac{2}{3} \text{ ומכאן ש-} \frac{x_{A'} - x_K}{x_K - x_C} = \frac{6-2}{2-0} = \frac{2}{1}$$

פתרון חלופי להוכחת היחס

$$\frac{A'K}{A'C} = \frac{2}{3} \text{ ומכאן ש-} \overline{A'K} = \frac{2}{3} \overline{A'C}, \text{ ולכן } \overline{A'K} = \underline{K} - \underline{A'} = \underline{x} = (-4, 4, -4)$$

$$\text{תשובה: } \frac{A'K}{A'C} = \frac{2}{3}$$

ד. הנקודה O היא נקודת החיתוך של אלכסון הבסיס AC עם אלכסון הבסיס BD.
 על פי נוסחת אמצע קטע, נקבל את $O(3, 3, 0)$.

$$\overline{C'O} = \underline{O} - \underline{C'} = \underline{x} = (3, -3, -6), \overline{C'K} = \underline{K} - \underline{C'} = \underline{x} = (2, -2, -4)$$

$$\frac{C'O}{C'O} = \frac{2}{3} \text{ ומכאן ש-} \overline{A'K} = \frac{2}{3} \overline{A'C}, \text{ והנקודה K נמצאת על הקטע } C'O.$$

תשובה: הוכחנו שהנקודה K נמצאת על הקטע C'O.

א. נסמן: $z = x + yi$ (לאורך כל התרגיל), ובהתאם $\bar{z} = x - yi$.

(1) נראה כי לכל מספר מרוכב z מתקיים $z\bar{z} = |z|^2$.

$$z\bar{z} = |z|^2$$

$$\Leftrightarrow (x + yi)(x - yi) = \sqrt{x^2 + y^2}^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 + y^2 \quad o.k.$$

תשובה: הוכחנו.

(2) z על מעגל היחידה, לכן $|z| = 1$, כלומר $x^2 + y^2 = 1$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + yi} = \frac{1}{x + yi} \cdot \frac{x - yi}{x - yi} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x - yi}{1} = x - yi$$

$$\left| \frac{1}{z} \right| = |x - yi| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{1}{r \operatorname{cis} \theta} \right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{אז, נתון } |z| = |r \operatorname{cis} \theta| = 1 \quad \text{ולכן: } \frac{1}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

תשובה: הוכחנו.

ב. נמשיך לנסמן: $z = x + yi$.

(1) z על מעגל היחידה, לכן על-פי תת-סעיף א (2) מתקיים $\frac{1}{z} = x - yi$.

$$z + \frac{1}{z} = x + iy + x - iy = 2x \quad \text{ממשי. נראה שהסכום } z + \frac{1}{z}$$

$$\text{ולכן } z + \frac{1}{z} \text{ הוא מספר ממשי, המונח על ציר ה-} x.$$

תשובה: הוכחנו.

(2) z_1 ו- z_2 הם מספרים מרוכבים הנמצאים על מעגל היחידה, כאשר הרכיבים המדומים שלהם חיוביים.

$$\text{נראה כי אם } z_1 + \frac{1}{z_1} + z_2 + \frac{1}{z_2} > 2 \text{ אז } z_1 \text{ ו- } z_2 \text{ נמצאים ברביע הראשון.}$$

$$\text{נסמן: } z_1 = x + yi \text{ ו- } z_2 = a + bi. \text{ לכן על פי תת-סעיף ב (1) } z_1 + \frac{1}{z_1} = 2x \text{ ו- } z_2 + \frac{1}{z_2} = 2a.$$

$$\text{מכאן ש- } 2x + 2a > 2 \text{ ו- } x + a > 1.$$

$$\text{הרכיבים המדומים של שני המספרים חיוביים, לכן } -1 < x, a < 1,$$

$$\text{ומכיוון ש- } x + a > 1, \text{ אז } 0 < x, a < 1$$

אם: $0 < x, a < 1$ אז z_1 ו- z_2 ברביע I, או III. אולם הרכיבים המדומים שלהם חיוביים, לכן ברביע הראשון.

תשובה: הוכחנו.

ג. $w = 1 \text{ cis } \theta$ הוא מספר מרוכב. נתון $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (רביע ראשון).

בסדרה הנדסית $a_1 = \frac{1}{w}$ ו- $a_2 = w$, וגם $S_5 = 0$.

(1) נביע באמצעות α את מנת הסידרה.

$$q = \frac{a_2}{a_1}$$

$$q = \frac{w}{1/w}$$

$$q = w^2$$

$$q = (1 \text{ cis } \alpha)^2$$

$$\boxed{q = \text{cis } 2\alpha}$$

תשובה: $q = \text{cis } 2\alpha$.

(2) נמצא את α , כאשר נתון כי $S_5 = 0$.

בנוסחת סכום של סדרה הנדסית: $S_5 = \frac{a_1(q^5 - 1)}{q - 1}$, הביטוי האלגברי שיכול להתאפס הוא $q^5 - 1$.

$$q^n - 1 = 0$$

$$(\text{cis } 2\alpha)^5 - 1 = 0$$

$$\text{cis } 10\alpha = 1$$

$$\text{cis } 10\alpha = \text{cis } 360^\circ k$$

$$10\alpha = 360^\circ k$$

$$\alpha = 36^\circ k, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$k = 1 \quad \boxed{\alpha = 36^\circ = \frac{\pi}{5}}$$

$$k = 2 \quad \boxed{\alpha = 72^\circ = \frac{2\pi}{5}}$$

תשובה: $\alpha = 36^\circ = \frac{\pi}{5}$, $\alpha = 72^\circ = \frac{2\pi}{5}$.

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$, המוגדרת לכל x .

(1) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

נמצא נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

$$\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) = 0$$

$$\frac{e^x}{e^x+1} = 1$$

$$e^x = e^x + 1$$

ואין נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

נמצא נקודת חיתוך עם ציר ה- y : $f(0) = \ln\left(\frac{e^0}{e^0+1}\right) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$.

תשובה: $(0, \ln\frac{1}{2})$ (או $(0, -\ln 2)$).

(2) נמצא את תחומי החיוביות והשליליות של $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$, אם יש כאלה.

הוכחנו שאין נקודות חיתוך עם ציר ה- x ,

כאשר נקודת החיתוך עם ציר ה- y $(0, \ln\frac{1}{2})$, היא בחלקו השלילי $(\ln\frac{1}{2} < 0)$.

תשובה: שליליות – כל x , חיוביות – אף x .

$$\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) = 0$$

$$\frac{e^x}{e^x+1} = 1$$

$$e^x = e^x + 1$$

ואין נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

(3) נמצא את משוואת האסימפטוטה המקבילה לציר ה- x .

נזכור שכאשר $x \rightarrow +\infty$ אז $y \rightarrow +\infty$, וכאשר $x \rightarrow -\infty$ אז $y \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{e^x}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{0}{0+1} \right) = \lim_{a \rightarrow 0} \ln(a) = -\infty$$

ואפשר, ומומלץ, להראות פשוט על ידי הצבות

מהרביע הרביעי. $f(20) = -2 \cdot 10^{-9} \rightarrow 0^-$ ו- $y = 0$ אסימפטוטה אופקית לימין, ומגיעים אליה מלמטה, מהרביע הרביעי.

ואין אסימפטוטה אופקית לשמאל. $f(-100) = -100 \rightarrow -\infty$ ו- $y = 0$

(4) נמצא את תחומי העלייה והירידה של $f(x) = \ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right)$.

$$f'(x) = \frac{e^x + 1}{e^x} \cdot \left(\frac{e^x(e^x + 1) - e^x e^x}{(e^x + 1)^2} \right)$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{e^x(e^x + 1)}$$

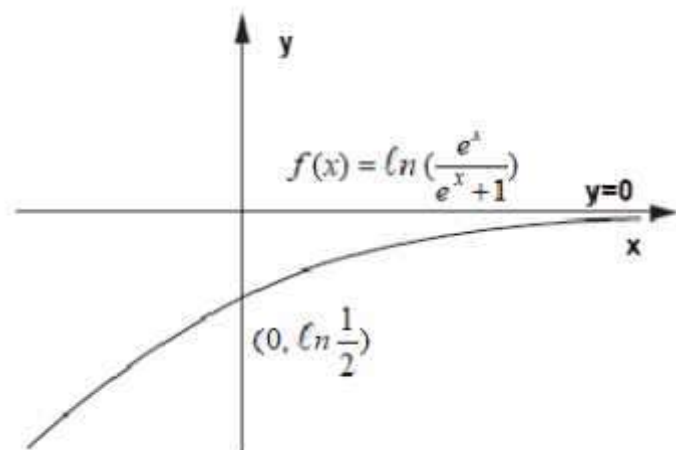
$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x(e^x + 1)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^x + 1}$$

הנגזרת חיובית לכל x , ולכן הפונקציה עולה לכל x .

תשובה: עלייה – כל x , ירידה – אף x .

ב. סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$



$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) = \ln e^x - \ln(e^x+1) = x \ln e - \ln(e^x+1) = x - \ln(e^x+1) \quad (1) \text{ ג.}$$

תשובה: הוכח.

(2) יש להסביר מדוע גרף הפונקציה $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$ נמצא כולו מתחת לישר $y = x$.

על פי תת סעיף ג(1) $f(x) = x - \ln(e^x+1)$, ולכן יש להסביר מדוע $\ln(e^x+1) > 0$.

$e^x > 0$, ולכן $e^x+1 > 1$. ולכן $\ln(e^x+1) > 0$ (כי, $\ln a > 0$ לכל $a > 1$).

תשובה: הוכח.

ד. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}$, המוגדרת לכל x .

(1) נמצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה, אם יש כאלה.

נמצא נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

תשובה: חיובית – כל x , שלילית – אף x .

(2) $a > 1$ פרמטר, לכן $\ln a > 0$.

נשים לב, שעל פי תת סעיף א(4) מתקיים: $\int \frac{1}{e^x+1} dx = f(x) + c = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + c$

נמצא את נפח גוף הסיבוב המבוקש.

$$V = \pi \int_0^{\ln a} \left(\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^{\ln a} \frac{1}{e^x+1} dx$$

$$V = \pi \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) \Big|_0^{\ln a}$$

$$x = \ln a \quad \pi \left[\ln\left(\frac{e^{\ln a}}{e^{\ln a}+1}\right) \right] = \pi \left[\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) \right]$$

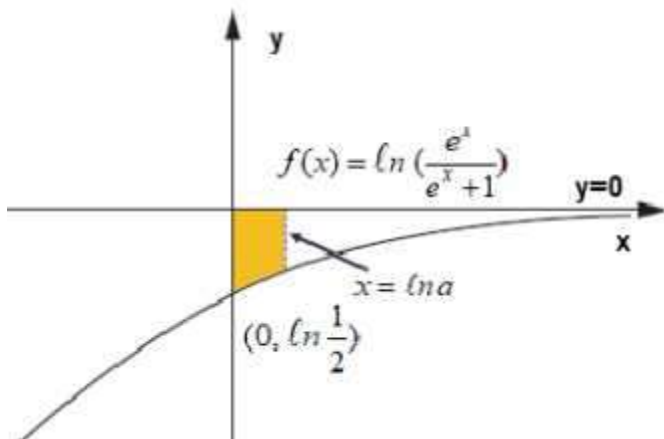
$$x = 0 \quad \pi \left[\ln\left(\frac{e^0}{e^0+1}\right) \right] = \pi \left[\ln\left(\frac{1}{2}\right) \right]$$

$$V = \pi \left[\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \right]$$

$$V = \pi \left[\ln\left(\frac{a}{\frac{1}{2}(a+1)}\right) \right]$$

$$V = \pi \ln\left(\frac{2a}{a+1}\right)$$

תשובה: הוכח.



א. נתונה משפחת הפונקציות $f(x) = \frac{e^{-mx}}{1+x^2}$, $m \geq 0$, הוא פרמטר.

(1) המונה מוגדר לכל x , והמכנה חיובי לכל x .

תשובה: תחום הגדרה: כל x .

(2) המונה חיובי לכל x , והמכנה חיובי לכל x , ובהתאם גם המנה חיובית לכל x .

תשובה: הפונקציה חיובית לכל x , ושלילית לאף x .

(3) נתון כי לכל הפונקציות, ממשפחה זו, נקודת חיתוך משותפת ביניהן.

הפרמטר m משפיע רק על ערכו של המונה. כאשר $x = 0$ המונה יהיה שווה ל- $e^{0 \cdot m} = e^0 = 1$,

ובמקרה זה נקודת החיתוך המשותפת תהיה $(0, 1)$.

תשובה: $(0, 1)$.

ב. (1) נתונה משפחת הפונקציות $f(x) = \frac{e^{-mx}}{1+x^2}$, $m \geq 0$, הוא פרמטר. נבדוק את השפעת הפרמטר על $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{-me^{-mx}(1+x^2) - 2xe^{-mx}}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-mx}[-m(1+x^2) - 2x]}{(1+x^2)^2}$$

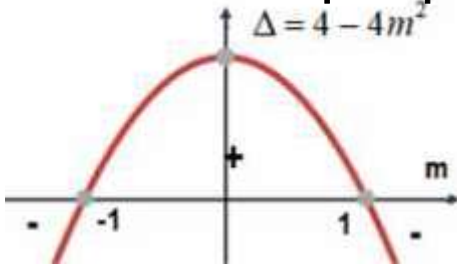
$$f'(x) = \frac{e^{-mx}(-m - mx^2 - 2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-mx}(-mx^2 - 2x - m)}{(1+x^2)^2}$$

הביטוי האלגברי $-mx^2 - 2x - m$ קובע את סימני הנגזרת.

אם $m = 0$ נקבל שהביטוי הוא $-2x$ שמתאפס פעם אחת בדיוק ($x = 0$), ולכן מתאים לסעיף (ii).

אם $m > 0$ אז הביטוי $-mx^2 - 2x - m$ הוא ריבועי, שמתאפס בהתאם לערך הדיסקרימיננטה $\Delta = b^2 - 4ac$.



$$\Delta = (-2)^2 - 4(-m)(-m)$$

$$\Delta = 4 - 4m^2$$

$$0 = 4 - 4m^2 \rightarrow m = \pm 1 \rightarrow m = 1 \leftarrow m > 0$$

כאשר $m = 1$ נקבל פתרון אחד בלבד, מתאים לסעיף (ii).

כאשר $0 < m < 1$ (כזכור $m > 0$) נקבל שני פתרונות, מתאים לסעיף (iii).

כאשר $m > 1$ (כזכור $m > 0$) נקבל שאין פתרון, מתאים לסעיף (i).

(i) תשובה: $f'(x)$ אינה מתאפסת בשום נקודה עבור $m > 1$.

(ii) תשובה: $f'(x)$ מתאפסת בנקודה אחת בלבד עבור $m = 0$, או $m = 1$.

(iii) תשובה: $f'(x)$ מתאפסת בשתי נקודות בדיוק כאשר $m > 1$.

(2) נתון $m \geq 0, m \neq 1$.

גרף I מתאים לפונקציה, עם שתי נקודות קיצון, ולכן הנגזרת מתאפסת פעמיים, כאשר היא מחליפה סימן. מכאן שמתאים לפרמטר $0 < m < 1$.

גרף II מתאים לפונקציה שיורדת לכל x , ללא כל פיתול (במיוחד לא כזה עם משיק שמקביל לציר ה- x), ולכן הנגזרת של הפונקציה אינה מתאפסת בשם נקודה. מכאן שמתאים לפרמטר $m > 1$.

גרף III מתאים לפונקציה שיש לה נקודת קיצון אחת, (ללא פיתול, שבו משיק שמקביל לציר ה- x). ולכן הנגזרת של פונקציה מתאפסת בנקודה אחת בדיוק (ומחליפה סימן). מכאן שמתאים לפרמטר $m = 0$ (כי נתון $m \neq 1$).

תשובה: גרף I: $0 < m < 1$, גרף II: $m > 1$, גרף III: $m = 0$.

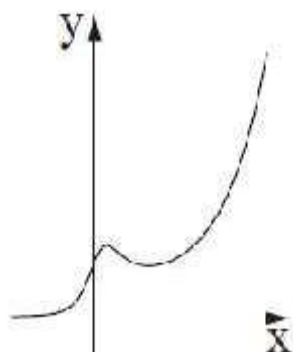
ג. $f(-x)$ סימטרית ל- $f(x)$, כאשר ציר ה- y הוא קו השיקוף ביניהן.

כיוון שנתון ש- $0 < m < 1$, הרי ש- גרף I מתאים ל- $f(x)$.

בזמן השרטוט יש לשים לב, שעתה נקודות המינימום והמקסימום יהיו ברביע הראשון, ואסימפטוטה אופקית, $y = 0$, תהייה לימין.

כאשר הגרף של $f(-x)$ יורד לכל x , בעוד שהגרף של $f(x)$ עולה לכל x .

סקיצה מתאימה ל- $f(-x)$



סקיצה של $f(x)$ (לצורכי השוואה בלבד)

