א. נתון מעגל שמשוואתו היא $x^2+y^2=a^2$ **, מעגל קנוני שרדיוסו** a $(a>0)$ **.**

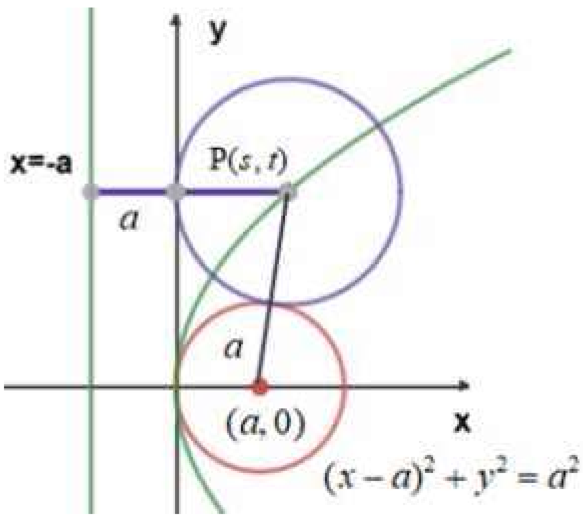
הזזה של עקום $f(x,y)$ **ימינה, היא במבנה של** $f(x-k,y)$ **,** $(k>0)$**.**

על-מנת שישיק לציר ה- y **יש להזיז** a **יחידות (ימינה, על פי הנתון),**

ולכן משוואת המעגל היא $(x-a)^2+y^2=a^2$**.**

ניתן, גם לומר, שמרכז המעגל יהיה $(a,0)$ **, ומכאן שמשוואתו** $(x-a)^2+y^2=a^2$**.**

תשובה: משוואת המעגל שהתקבל היא $(x-a)^2+y^2=a^2$ **.**



ב. נסמן $\mathrm{P}(s,t)$ **, נקודה על המקום הגיאומטרי.**

המעגל החדש משיק גם לציר ה- y **מימין, לכן רדיוסו הוא** s **.**

<u>דרך אחת לפתרון</u>

אורכו של קטע המרכזים שווה לסכום שני רדיוסי המעגלים.

$$s+a=\sqrt{(s-a)^2+(t-0)^2}$$
$$s^2+2as+a^2=s^2-2as+a^2+t^2$$
$$4as=t^2$$
$$\boxed{y^2=4ax}$$

וזאת הפרבולה $y^2=4ax$ **, שהמוקד שלה הוא** $(a,0)$ **והמדריך שלה הוא** $x=-a$ **.**

<u>דרך שנייה לפתרון</u>

המרחק של $\mathrm{P}(s,t)$ **מהישר** $x=-a$ **שווה למרחקה מנקודה קבועה** $(a,0)$**,**

וזו בדיוק הגדרתה של הפרבולה כמקום גיאומטרי, כאשר הישר הוא המדריך, והנקודה הקבועה היא המוקד.

תשובה: משוואת המקום הגיאומטרי , שעליו נמצאים מרכזי המעגלים, היא $y^2=4ax$**.**

ג. הישר $y=x+3$ **משיק בנקודה** M **לפרבולה** $y^2=4ax$**.**

משוואת המשיק לפרבולה, בנקודה שעל הפרבולה, היא $yy_0=p(x+x_0)$**.**

עבור $y=0$ **נקבל שנקודת החיתוך עם ציר ה-** x **היא** $(-x_0,0)$**.**

הישר $y=x+3$ **חותך את ציר ה-** x **בנקודה** $(-3,0)$**, ולכן** $x_0=3$ **ונקודת ההשקה:** $(3,6)$ $\leftarrow y=3+3=6$**.**

נציב במשוואת הפרבולה ונקבל $6^2=4a\cdot 3$ **, ומכאן ש-** $a=3$**.**

תשובה: $a=3$ **.**

ד. משוואת המעגל שהתקבל בסעיף א היא $(x-3)^2+y^2=9$, ומרכזו הוא $(3,0)$.

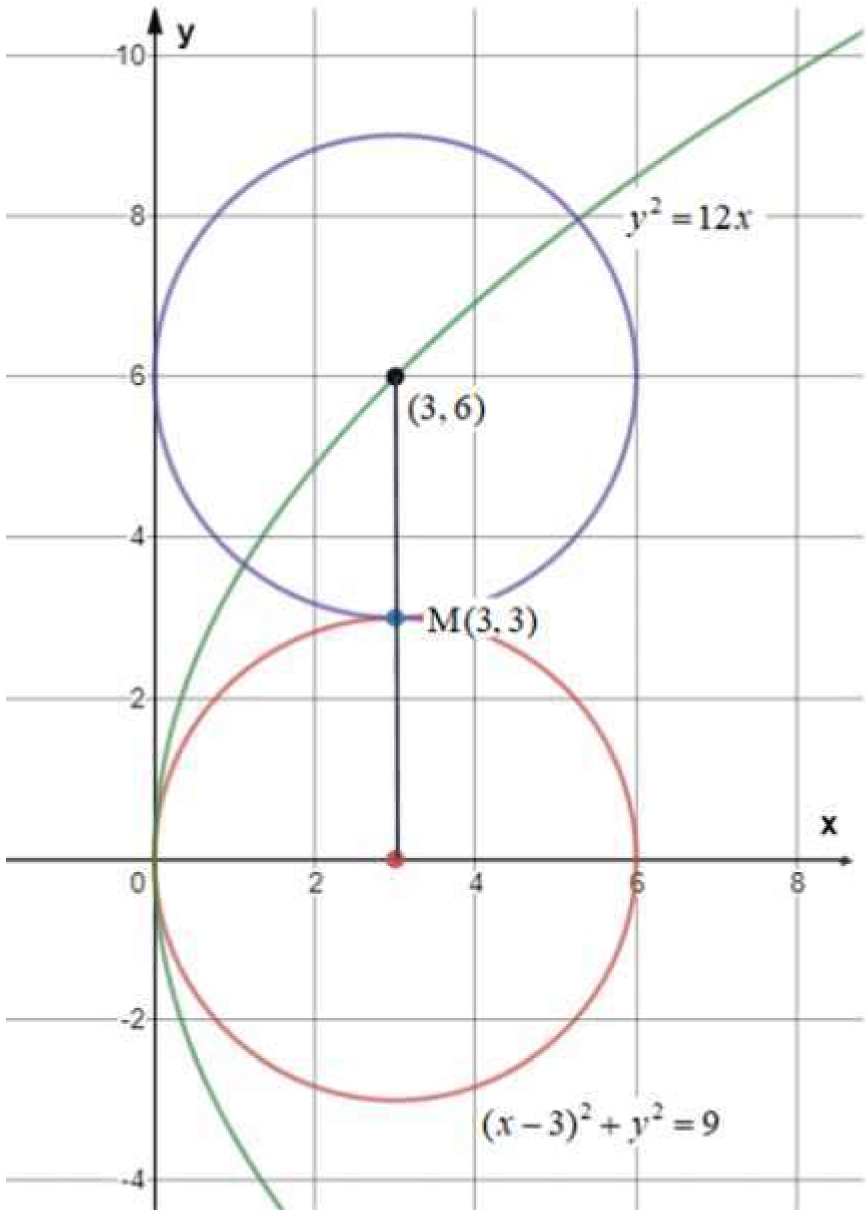
משוואת הפרבולה היא $y^2=12x$.

מרכז המעגל שנבנה כמתואר בסעיף ב הוא $(3,6)$.

התקבל ששיעורי ה- x של שני המרכזים שווים, ולכן $x=3$ הוא גם שיעור ה- x של נקודת ההשקה.

רדיוס כל אחד מהמעגלים הוא 3, ומכאן ששיעורי נקודת ההשקה הם $\mathrm{M}(3,3)$.

תשובה: $\mathrm{M}(3,3)$.



א. נתונה פירמידה SABCD **שבסיסה** ABCD **הוא ריבוע.**

$\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{u}}$ $\boxed{\overrightarrow{AD}=\underline{v}}$ $\boxed{\overrightarrow{AS}=\underline{w}}$

$$\overrightarrow{SP}=t\cdot\overrightarrow{SD}\quad(t>0)$$

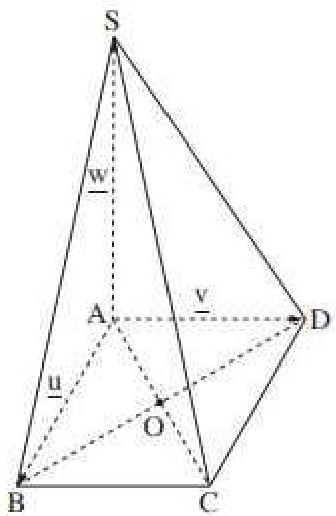
$$\overrightarrow{SP}=t\cdot(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AD})$$

$$\boxed{\overrightarrow{SP}=t\underline{v}-t\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SP}$$

$$\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}+t\underline{v}-t\underline{w}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}\underline{u}+(t-\frac{1}{2})\underline{v}+(1-t)\underline{w}}$$



תשובה: $\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{2}\underline{u}+(t-\frac{1}{2})\underline{v}+(1-t)\underline{w}$ **.**

ב. OP **יקביל למישור הפאה** SAB **אם יתקיימו שני תנאים:**

(1) $\overrightarrow{OP}$ **יהיה קומבינציה ליניארית של וקטורים הפורשים את מישור הפאה, קרי ק"ל של** $\underline{u}$ **ו-** $\underline{w}$ **.**

ולכן, עבור $t=\frac{1}{2}$ $\quad t-\frac{1}{2}=0\rightarrow$ OP **מקביל למישור הפאה, או מוכל בה.**

(2) קיימת נקודה על OP **, שאינה על מישור הפאה** SAB **.**

נתון ש- $t>0$ **ולכן** P **לא מתלכדת עם** S **, וגם** O **אינה על הפאה (מצאנו אפילו שתי נקודות מתאימות).**

מכאן שעבור $t=\frac{1}{2}$ **,** OP **יקביל למישור הפאה** SAB **.**

ג. נעדכן את הנתונים.

$\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{u}}$ $\boxed{\overrightarrow{AD}=\underline{v}}$ $\boxed{\overrightarrow{AS}=\underline{w}}$

$\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{u}}$ $\boxed{|\underline{u}|=4}$ $\boxed{\underline{u}^2=16}$

$\boxed{\overrightarrow{AD}=\underline{v}}$ $\boxed{|\underline{v}|=4}$ $\boxed{\underline{v}^2=16}$

$\boxed{\overrightarrow{AS}=\underline{w}}$ $\boxed{|\underline{w}|=4\sqrt{2}}$ $\boxed{\underline{w}^2=32}$

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=0\ \leftarrow\ \underline{u}\perp\underline{v}$$

$$\left.\begin{array}{l}\underline{u}\cdot\underline{w}=0\\ \underline{v}\cdot\underline{w}=0\end{array}\right\}\leftarrow\ AS\perp ABCD$$

נראה ש- $\underline{u}$ הוא הנורמל למישור הפאה SAD**.**

$$\left.\begin{aligned}\underline{u}\cdot\underline{v}=0\\ \underline{u}\cdot\underline{w}=0\end{aligned}\right\}\rightarrow\ \underline{u}\perp \mathrm{SAD}$$

מכאן שהזווית בין $\underline{u}$ להיטל של OP **ל- למישור הפאה** SAD **, היא הזווית שבין** OP **למישור הפאה** SAD**.**

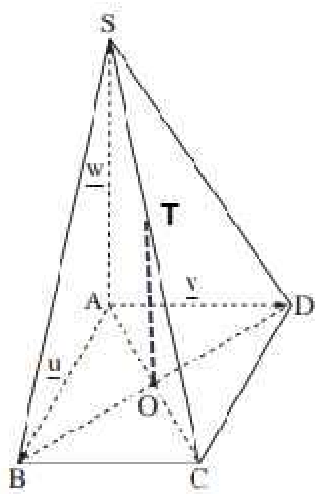
$$\sin\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\underline{u}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cdot\left|\underline{u}\right|}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{1}{2}\underline{u}+(t-\frac{1}{2})\underline{v}+(1-t)\underline{w}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}\underline{u}^2+(t-\frac{1}{2})^2\underline{v}^2+(1-t)^2\underline{w}^2}\quad\leftarrow\underline{u}\cdot\underline{v}=0\,,\,\underline{u}\cdot\underline{w}=0\,,\,\underline{v}\cdot\underline{w}=0$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot16+(t-\frac{1}{2})^2\cdot16+(1-t)^2\cdot32}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\sqrt{48t^2-80t+40}$$



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\underline{u}=-\frac{1}{2}\underline{u}^2=-\frac{1}{2}\cdot16=-8$$

$$\sin45^\circ=\frac{|-8|}{\sqrt{48t^2-80t+40}\cdot4}\quad(\ )^2$$

$$48t^2-80t+40=8$$

$$48t^2-80t+32=0$$

$$\boxed{t=1}\ \boxed{t=\frac{2}{3}}$$

תשובה: $t=\frac{2}{3}$ **,** $t=1$ **(בשני המקרים** P **היא נקודה על הקטע** SD**, כאשר עבור** $t=1$ **מתלכדת עם הקודקוד** D **).**

ד. TABCD **היא פירמידה ישרה, לכן הגובה יורד למרכז המעגל החוסם, קרי לנקודה** O**.**

OT **וגם** AS **מאונכים לבסיס, ולכן הם מקבילים זה לזה.**

כמו כן O **אמצע של** AC **, ולכן** OT **קטע אמצעים במשולש** ACS **, ואורכו** $\mathrm{OT}=\frac{\mathrm{AS}}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$**.**

$V_{\mathrm{TABCD}}=\frac{S_{\mathrm{ABCD}}\cdot\mathrm{OT}}{3}=\frac{4\cdot4\cdot2\sqrt{2}}{3}=\frac{32\sqrt{2}}{3}$**.**

תשובה: נפח הפירמידה הישרה TABCD **הוא** $\frac{32\sqrt{2}}{3}$ **.**

א. נתונה סדרה הנדסית, שבה: $a_1 = 1$ **,** $a_2 = iz$**, ולכן** $q = \frac{a_2}{a_1} = iz$ **.**

(1) נמצא את שלושת האיברים הבאים.

$$a_3 = a_2 q = iz \cdot iz = -z^2$$
$$a_4 = a_3 q = -z^2 \cdot iz = -iz^3$$
$$a_5 = a_4 q = -iz^3 \cdot iz = z^4$$

תשובה: $a_1 = 1$ **,** $a_2 = iz$ **,** $a_3 = -z^2$ **,** $a_4 = -iz^3$ **,** $a_5 = z^4$ **.**

(2) נראה שסכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה שווה ל- $\frac{z^5 + i}{z+1}$ **.**

$$S_5 = \frac{a_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot \left[(iz)^5 - 1\right]}{iz - 1} = \frac{i^5 z^5 - 1}{iz - 1} = \frac{iz^5 - 1}{iz - 1} = \frac{i(z^5 + i)}{i(z + i)}$$

$$\boxed{S_5 = \frac{z^5 + i}{z + i}}$$

תשובה: הוכחנו שסכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה שווה ל- $\frac{z^5 + i}{z + i}$ **.**

ב. (1) נמצא את הפתרונות של המשוואה $z^5 = -i$ **, על-פי נוסחת השורשים של מספר מרוכב.**

$$z^5 = -i$$
$$z^5 = cis\ 270°$$
$$z_k = cis\left(\frac{270°}{5} + \frac{360°k}{5}\right) = cis\ (54° + 72°k) \text{ .}$$
$$z_0 = cis\ (54°)\ ,\ z_1 = cis\ (126°)\ ,\ z_2 = cis\ (198°)\ ,$$
$$z_3 = cis\ (270°) = -i\ ,\ z_4 = cis\ (342°)$$

$$z + \frac{1}{z} = x + iy + x - iy = 2x$$

תשובה: $z_0 = cis\ (54°)\ ,\ z_1 = cis\ (126°)\ ,\ z_2 = cis\ (198°)\ ,\ z_3 = cis\ (270°) = -i\ ,\ z_4 = cis\ (342°)$ **.**

(2) נמצא את הפתרונות של המשוואה $1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 = 0$ **, כלומר מתי** $S_5 = 0$ **.**

$\frac{z^5 + i}{z + i} = 0 \quad \to z^5 + i = 0 \quad \to z^5 = -i$ **, וזו בדיוק המשוואה שאת פתרונותיה מצאנו בתת סעיף ב(1).**

אולם, עבור הפתרון $z = -i$ **נקבל ש-** $q = i \cdot (-i) = 1$ **והסדרה קבועה, בניגוד לנתון, ו-** $z = -i$ **אינו פתרון.**

ואכן, אם נציב $-i$ **נקבל סדרה קבועה, שסכומה** $1 + i(-i) - (-i)^2 - i(-i)^3 + (-i)^4 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ **.**

ניתן גם לראות שהפתרון זה מאפס את המכנה של משוואת הסכום $\frac{z^5 + i}{z + i}$ **.**

תשובה: $cis\ (54°)\ ,\ cis\ (126°)\ ,\ cis\ (198°)\ ,\ cis\ (342°)$ **.**

ג. הנקודה A נמצאת ברביע השלישי במישור גאוס, ולכן היא מתאימה לפתרון $z_2 = cis\,(198°)$.

ΔABO **הוא ישר זוויות, ולכן כל צלעותיו שוות וזוויותיו שוות ל-** $60°$**.**

$|z_2| = |cis\,(198°)| = 1$, **ומכאן שגם הערך המוחלט של המספר המרוכב, המתאים לנקודה** B**, הוא 1.**

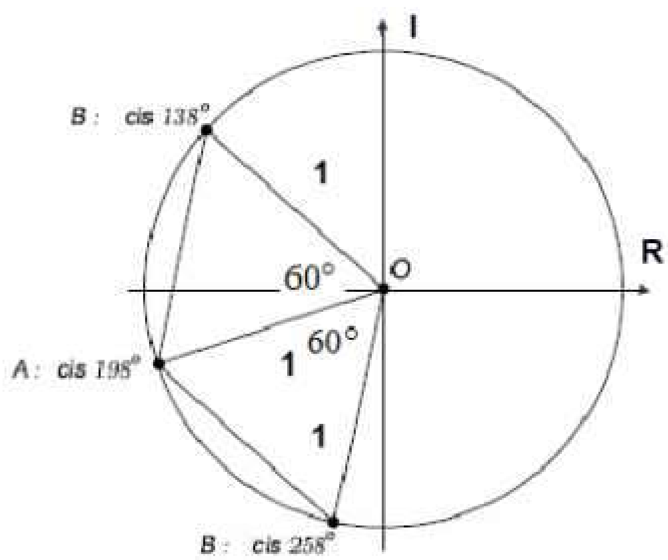
אם כך, כבר בנינו משולש שווה שוקיים, ונשאר לדאוג לכך ש- $\sphericalangle AOB = 60°$ **.**

יש שתי אפשרויות:

עם כיוון השעון: $z_B = cis\,(198° - 60°) = cis\,138°$**.**

נגד כיוון השעון: $z_B = cis\,(198° + 60°) = cis\,258°$**.**

תשובה: $cis\,138°$ **,** $cis\,258°$**.**



א. נתונה הפונקציה $f(x) = \ell n\,(x^2+ax+1)$ **,** $-2<a<2$ **פרמטר.**

בתחום הגדרה, הארגומנט – הביטוי שמקבלת הפונקציה, צריך להיות חיובי.

$$x^2+ax+1>0$$

הדיסקרימיננטה, $\Delta = b^2-4ac$ **, היא** a^2-4**.**

אולם, $-2<a<2$ **, ולכן הדיסקרימיננטה שלילית והביטוי** x^2+ax+1 **אינו מתאפס לכל** x^2+ax+1**.**

כיוון שהמקדם של x^2 **הוא חיובי, הרי שזהו טרינום של פרבולה בעלת מינימום (פרבולה מחייכת ומרחפת),**

ולכן חיובי לכל x**.**

תשובה: הוכחנו ש- $f(x) = \ell n\,(x^2+ax+1)$ **מוגדרת לכל** x **.**

ב. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x **.**

$$\ell n\,(x^2+ax+1)=0$$
$$x^2+ax+1=1$$
$$x(x+a)=0$$
$$x=0 \quad , \quad x=-a$$

תשובה: $(0,0)$ **,** $(-a,0)$**.**

ג. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x) = \ell n\,(x^2+ax+1)$**.**

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x+a}{x^2+ax+1}}$$
$$2x+a=0$$
$$x=-\frac{a}{2}$$

הביטוי $2x+a$ **הוא של פונקציה קווית עולה, ולכן עובר משליליות לחיוביות, עבור** $x=-\frac{a}{2}$ **,**

ולכן הפונקציה עוברת מירידה לעלייה, עבור $x=-\frac{a}{2}$ **.**

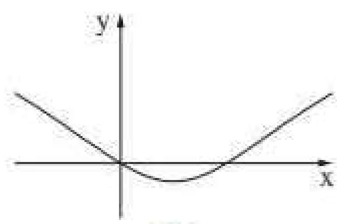
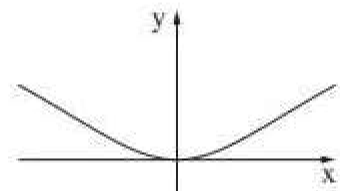
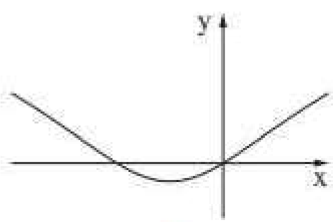
$$f(\frac{a}{2}) = \ell n\left[(-\frac{a}{2})^2 + a(-\frac{a}{2})+1\right]$$
$$f(\frac{a}{2}) = \ell n\,(\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}+1)$$
$$f(\frac{a}{2}) = \ell n\,(1-\frac{a^2}{4}) \quad \rightarrow \boxed{(-\frac{a}{2}, \ell n\,(1-\frac{a^2}{4}))}$$

תשובה: $(-\frac{a}{2}, \ell n\,(1-\frac{a^2}{4}))$ **, מינימום.**

ד. נתאים, לכל אחד מהגרפים, את הסקיצה במתאימה – כתלות בפרמטר a .

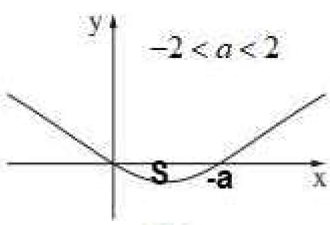
נשים לב לכך ששלושת הגרפים מראים, כמובן, את נקודת המינימום $(-\frac{a}{2}, \ell n\,(1-\frac{a^2}{4}))$.

כאשר, השוני הוא בסימני שיעורי ה- x , וה- y .

גרף זה מתאים עבור $-\frac{a}{2} > 0$ **.** **וכיוון שנתון כי** $-2 < a < 2$, **הרי שבמקרה זה** $-2 < a < 0$ **(2).**  III	**גרף זה מתאים עבור** $-\frac{a}{2} = 0$ **.** **וכיוון שנתון כי** $-2 < a < 2$, **הרי שבמקרה זה** $a = 0$ **(3).** **נשים לב ש-** $\ell n\,(1-\frac{0^2}{4}) = \ell n\,1 = 0$ **והגרף אכן עוברת בראשית.**  II	**גרף זה מתאים עבור** $-\frac{a}{2} < 0$ **.** **וכיוון שנתון כי** $-2 < a < 2$, **הרי שבמקרה זה** $0 < a < 2$ **(1).**  I

תשובה: גרף III **מתאים ל- (2):** $-2 < a < 0$ **, גרף** II **מתאים ל- (3):** $a = 0$ **, גרף** I **מתאים ל- (1):** $0 < a < 2$**.**

ה. השטח המתאים, עבור $-2 < a < 2$**, מסומן ב -** S **,**



III

כאשר, על פי סעיף ב, נקודות החיתוך עם ציר ה- x **הן** $(0,0)$ **,** $(-a,0)$ **.**

מכאן ש- $S = \int_0^{-a}\left[0-\ell n\,(x^2+ax+1)\right]dx = -\int_0^{-a}\left[\ell n\,(x^2+ax+1)\right]dx$ **.**

נביע, באמצעות a **ו-** S **, את ערכו של האינטגרל המסוים** $\int_0^{-a}\ell n\,(4x^2+4ax+4)\,dx$**.**

$$\int_0^{-a}\ell n\,(4x^2+4ax+4)\,dx =$$

$$\int_0^{-a}\ell n\,4(x^2+ax+1)\,dx =$$

$$\int_0^{-a}\left[\ell n\,4+\ell n(x^2+ax+1)\right]dx = \quad \leftarrow \ell og\,xy = \ell og\,x + \ell og\,y$$

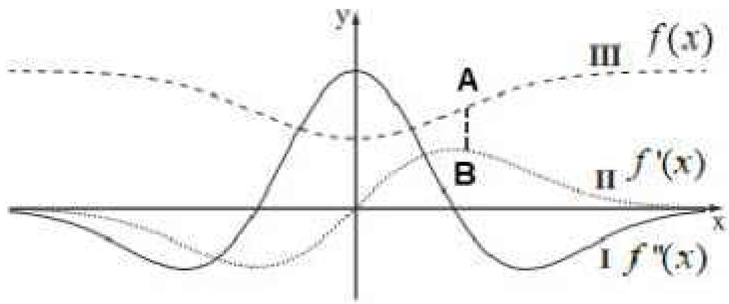
$$\int_0^{-a}\ell n\,4\,dx + \int_0^{-a}\ell n(x^2+ax+1)\,dx =$$

$$x\ell n\,4\,\Big]_0^{-a} + (-S) =$$

$$\boxed{-a\ell n\,4 - S}$$

תשובה: $\int_0^{-a}\ell n\,(4x^2+4ax+4)\,dx = -a\ell n\,4 - S$**.**

א. נתונים בסרטוט גרפים של $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$ - המוגדרים לכל x .



- **נשים לב שגרף III חיובי לכל x,**

ולכן אינו יכול להיות גרף של נגזרת, כי אין כאן גרף של פונקציה קדומה שעולה לכל x.

- **גרף II עובר בראשית משליליות לחיוביות,**

ולכן לפונקציה הקדומה שלו צריכה להיות נקודת קיצון אחת בלבד, מסוג מינימום – כמו של גרף III.

- **גרף I עובר משליליות לחיוביות, ולאחר מכן מחיוביות לשליליות,**

ולכן לפונקציה הקדומה שלו יש שתי נקודות קיצון, מינימום ומקסימום (משמאל לימין), כמו של גרף II.

- **גרף I עובר משליליות לחיוביות, ולאחר מכן מחיוביות לשליליות,**

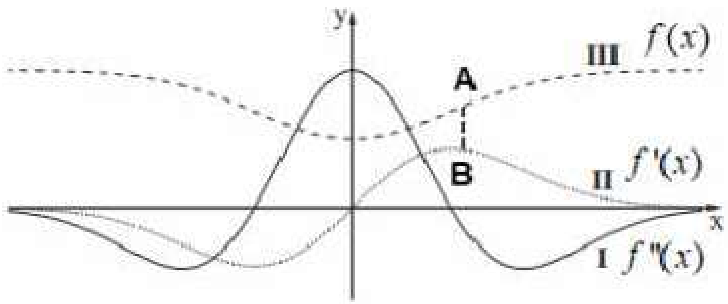
  ואם הוא הגרף של $f''(x)$, אז תחומי הקעירות שלה יהיו כלפי מטה, כלפי מעלה, כלפי מטה,

  בדיוק כמו של גרף III.

- **תחומי העלייה והירידה של גרף II תואמים את תחומי הקעירויות כלפי מעלה וכלפי מטה של גרף III,**
  מתאים אם גרף II הוא של $f'(x)$, וגרף III הוא של $f(x)$.

תשובה: גרף I מתאים ל- $f''(x)$, גרף II מתאים ל- $f'(x)$, גרף III מתאים ל- $f(x)$.

ב. נתון כי $f'(x)=xe^{-x^2}$.



הפונקציה שיש להביא למינימום היא אורך הקטע AB **, שמקביל לציר ה-** y .

נסמן $x_{\text{A}}=x_{\text{B}}=t$ **, ובהתאם שיעורי הנקודות הן:** $\text{A}(t,\,f(t))$ **ו-** $\text{B}(t,\,f'(t))$.

$$\text{AB}=y_{\text{A}}-y_{\text{B}}=f(t)-f'(t)$$

$$(\text{AB})'=f'(t)-f''(t)$$

$$\boxed{f'(x)=xe^{-x^2}}$$

$$f''(x)=e^{-x^2}+x(-2x)e^{-x^2}$$

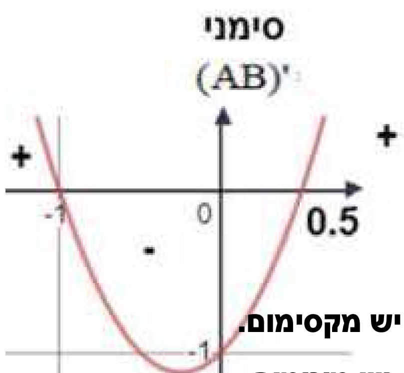
$$\boxed{f''(x)=e^{-x^2}(1-2x^2)}$$

$$(\text{AB})'(t)=te^{-t^2}-e^{-t^2}(1-2t^2)$$

$$\boxed{(\text{AB})'(t)=e^{-t^2}(2t^2+t-1)}$$

$$e^{-t^2}>0$$

$$2t^2+t-1=0\quad\rightarrow t=-1,\quad t=0.5$$



הביטוי האלגברי $2t^2+t-1$ **קובע את סימני הנגזרת.**

עבור $t=-1$ **הנגזרת עוברת מחיוביות לשליליות, ולפונקציית אורך הקטע** AB **יש מקסימום.**

עבור $t=0.5$ **הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות, ולפונקציית אורך הקטע** AB **יש מינימום.**

תשובה: $x=0.5$ **מינימום ,** $x=-1$ **מקסימום.**

ג. נתון כי האורך המקסימלי של הקטע AB **הוא** $1+\frac{1}{2e}$ **, ולכן** $AB(-1)=1+\frac{1}{2e}$ **.**

$$AB(-1)=1+\frac{1}{2e}$$

$$f(-1)-f'(-1)=1+\frac{1}{2e}$$

$$f'(-1)=-1\cdot e^{-(-1)^2}=e^{-1}=-\frac{1}{e}$$

$$f(-1)=-\frac{1}{e}+1+\frac{1}{2e}$$

$$\boxed{f(-1)=1-\frac{1}{2e}}$$

נמצא את הפונקציה הקדומה של $f'(x)=xe^{-x^2}$ **, כלומר את** $f(x)$ **, בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית.**

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$

$$f(x)=\int xe^{-x^2}\,dx$$

$$f(x)=\int -\frac{1}{2}e^{-x^2}\cdot(-2x)\,dx$$

$$f(x)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c$$

$$1-\frac{1}{2e}=-\frac{1}{2}e^{-(-1)^2}+c \quad \leftarrow f(-1)=1-\frac{1}{2e}$$

$$1-\frac{1}{2e}=-\frac{1}{2e}+c$$

$$\boxed{1=c}$$

$$\boxed{f(x)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+1}$$

תשובה: $f(x)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+1$ **.**