א. נצייר את המשולש OMG **, כאשר** $\mathrm{O}(0,0)$ **, ו-** $\mathrm{M}(2,6)$ **.**

נפתור בשתי דרכים:

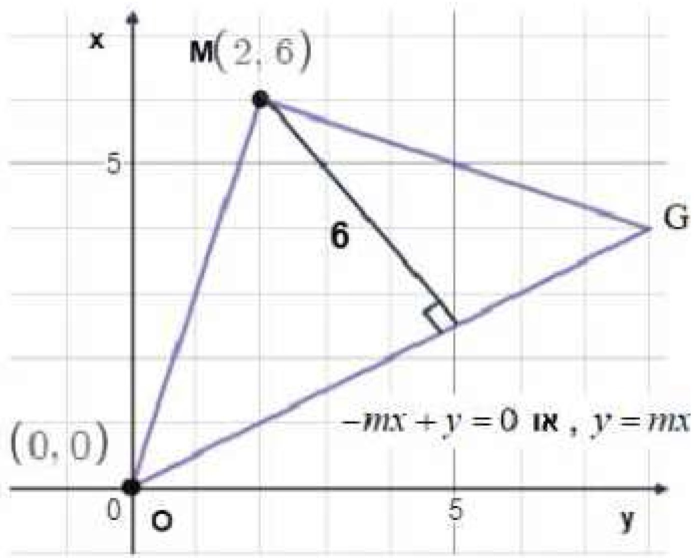
- **<u>דרך ראשונה</u>**

נשים לב שאורך הגובה מ- M **הוא** 6 **, כאשר** $y_{\mathrm{M}}=6$ **,**

ולכן נקבל מיידית שאחת משתי האפשרויות לצלע OG **היא ציר ה-** x **, ומשוואתה** $y=0$ **.**

כמו כן $x_{\mathrm{M}}=2\neq 6$ **, ולכן ציר ה-** y **אינו אפשרות לצלע זו, ומכאן שניתן לסמן את השיפוע שלה ב-** m **.**

כיוון שהצלע OG **עוברת בראשית, הרי שמשוואתה** $y=mx$ **, או** $-mx+y=0$ **.**



על פי נוסחת מרחק בין נקודה לישר:

$$6=\frac{|-2m+6|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$3\sqrt{m^2+1}=|-m+3|$$

$$9(m^2+1)=(3-m)^2$$

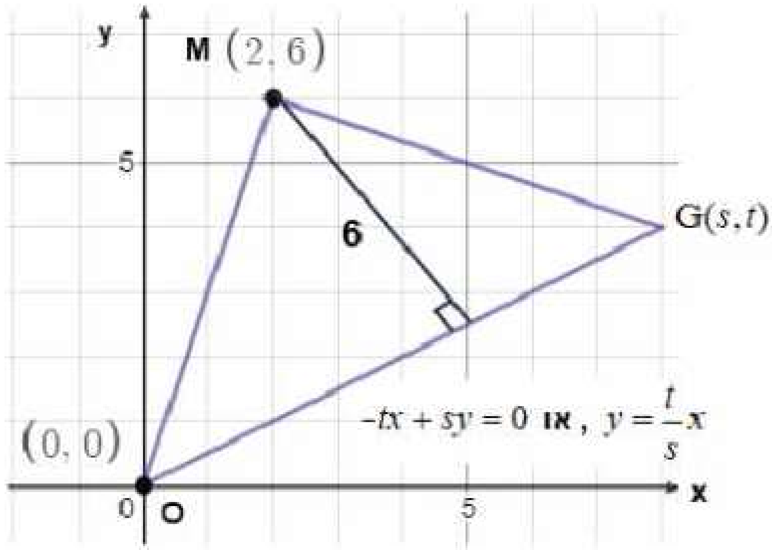
$$8m^2+6m=0$$

$$m=0,\ m=-\frac{3}{4}$$

תשובה: $y=0$, $y=-\frac{3}{4}x$ **.**

- **<u>דרך שנייה</u>**

נסמן את $\mathrm{G}(s,t)$ נקודה על המקום הגיאומטרי.



משוואת הצלע OG שעוברת בראשית היא $y=\frac{t}{s}x$, או $-tx+sy=0$.

על פי נוסחת מרחק בין נקודה לישר:

$$6=\frac{|-2t+6s|}{\sqrt{s^2+t^2}}$$

$$3\sqrt{s^2+t^2}=|-t+3s|$$

$$9(s^2+t^2)=(3s-t)^2$$

$$9s^2+9t^2=9s^2-6st+t^2$$

$$8t^2+6st=0$$

$$2t(4t+3s)$$

$$2t=0 \quad \rightarrow t=0 \quad \rightarrow \boxed{y=0}$$

$$4t+3s=0 \quad \rightarrow t=-\frac{3}{4}s \quad \rightarrow \boxed{y=-\frac{3}{4}x}$$

תשובה: $y=0$, $y=-\frac{3}{4}x$.

ב. מעגל שמרכזו בנקודה $M(2,6)$ משיק לשני הישרים שמצאנו, בנקודות P ו- Q .

(1) רדיוס המעגל הוא אורך הגובה לישרים, ולכן הוא 6.

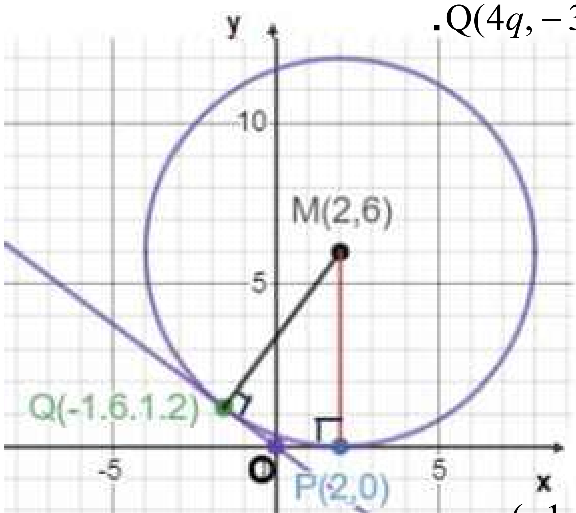
תשובה: משוואת המעגל היא $(x-2)^2+(y-6)^2=36$.

(2) ציר ה- x במרחק 6 ממרכז המעגל, ולכן שיעורי הנקודה P (או Q) הם $(2,0)$.

נקודת ההשקה השנייה נמצאת על הישר $y=-\frac{3}{4}x$, ונסמנה $Q(4q,-3q)$.

שיפוע הרדיוס MQ , הופכי ונגדי, הוא $+\frac{4}{3}$.

$$\frac{6+3q}{2-4q}=\frac{4}{3}$$
$$18+9q=8-16q$$
$$q=-0.4$$

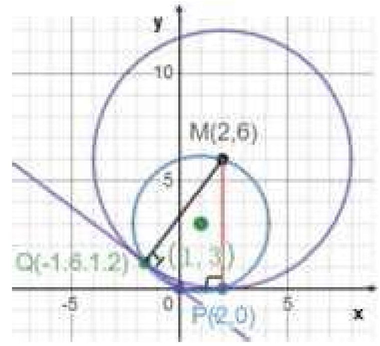


ולכן שיעורי הנקודה Q (או P) הם $(-1.6,1.2)$.

תשובה: שיעורי נקודות ההשקה של המעגל הם $(2,0)$ ו- $(-1.6,1.2)$.

ג. המרובע $OPMQ$ הוא בר חסימה כי סכום זוויות נגדיות הוא $180°$ ($\sphericalangle P=\sphericalangle Q=90°$).

הקוטר נשען על זווית ישרה, ולכן מרכז המעגל הוא אמצע הקוטר OM .



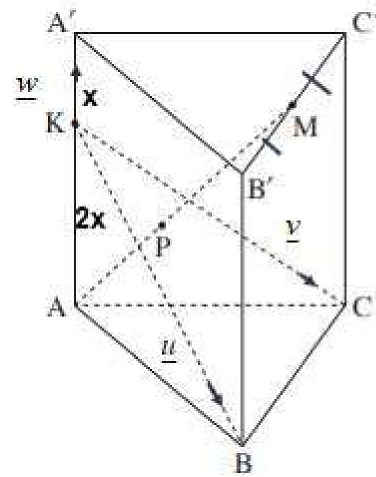
$(\frac{0+2}{2},\frac{0+6}{2})=(1,3)$.

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{10}$$

תשובה: המרובע $OPMQ$ הוא בר חסימה , ומשוואת המעגל היא $(x-1)^2+(y-3)^2=10$.

א. נתונה מנסרה משולשת ישרה.

$\boxed{\overrightarrow{AA'}=\underline{w}}$ $\boxed{\overrightarrow{KC}=\underline{v}}$ $\boxed{\overrightarrow{KB}=\underline{u}}$



$$\overrightarrow{B'M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KC})$$

$$\boxed{\overrightarrow{B'M}=-\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}}$$

$$AK=2KA'$$

$$\boxed{\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'M}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\underline{w}+\underline{u}+\underline{w}-\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{5}{3}\underline{w}}$$

תשובה: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{5}{3}\underline{w}$.

ב. נתון כי P **נמצאת על** AM **, כאשר:** $\boxed{\overrightarrow{KP}=\alpha\underline{u}+\beta\underline{v}}$

$$\overrightarrow{KP}=\overrightarrow{KA}+\gamma\overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{KP}=-\frac{2}{3}\underline{w}+\gamma(\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{5}{3}\underline{w})$$

$$\boxed{\overrightarrow{KP}=\frac{1}{2}\gamma\underline{u}+\frac{1}{2}\gamma\underline{v}+(-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}\gamma)\underline{w}}$$

נבנה מערכת של שלוש משוואות, על-פי יחידות ההצגה של $\overrightarrow{KP}$ **.**

$$(1)\quad \alpha=\frac{1}{2}\gamma$$

$$(2)\quad \beta=\frac{1}{2}\gamma$$

$$(3)\quad 0=\frac{5}{3}\gamma-\frac{2}{3}\quad\rightarrow\boxed{\gamma=\frac{2}{5}}\quad\rightarrow\boxed{\alpha=\frac{1}{5}}\quad,\quad\boxed{\beta=\frac{1}{5}}$$

תשובה: $\alpha=\frac{1}{5}$ **,** $\beta=\frac{1}{5}$.

ג. נתון: $P(0,4,6)$, $\underline{u}=(5,5,-5)$, $\underline{v}=(10,-5,0)$.

(1) $\overrightarrow{KP}=\alpha\underline{u}+\beta\underline{v}$ **, כאשר** K **נמצאת במישור** KBC .

תשובה: P **במישור** KBC**, כי** K **נמצאת במישור זה,**

ו- $\overrightarrow{KP}$ **קומבינציה לינארית של שני וקטורים, הפורשים את המישור.**

(2) נמצא את משוואת המישור KBC ,

שההצגה הפרמטרית שלו היא $\underline{x}=(0,4,6)+t(1,1,-1)+s(2,-1,0)$.

$$(a,b,c)\cdot(1,1,-1)=0 \quad \to a+b-c=0$$
$$(a,b,c)\cdot(2,-1,0)=0 \quad \to 2a-b=0 \quad \to a=1, \quad b=2$$
$$1+2-c=0 \quad \to c=3$$
$$\pi_{\text{KBC}}=x+2y+3z+d=0$$
$$P(0,4,6)\in\pi_{\text{KBC}} \quad \to 0+2\cdot4+3\cdot6+d=0 \quad \to d=-26$$
$$\boxed{\pi_{\text{KBC}}=x+2y+3z-26=0}$$

תשובה: משוואת המישור KBC **היא** $x+2y+3z-26=0$**.**

(3) נמצא את שיעורי הנקודה K**.**

$$\overrightarrow{KP}=\frac{1}{5}\underline{u}+\frac{1}{5}\underline{v}$$
$$\underline{P}-\underline{K}=\frac{1}{5}(5,5,-5)+\frac{1}{5}(10,-5,0)$$
$$(0,4,6)-(1,1,-1)-(2,-1,0)=\underline{K}$$
$$\boxed{\underline{K}=(-3,4,7)}$$

תשובה: $K(-3,4,7)$**.**

א. נתון: $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha = \mathrm{c}is\ \alpha$ **,** $z_2 = \cos\frac{7\alpha}{3} + i\sin\frac{7\alpha}{3} = \mathrm{c}is\ \frac{7\alpha}{3}$ **,**

שני מספרים מרוכבים שונים, הנמצאים על מעגל היחידה $\rightarrow\ |z_1| = |z_2| = 1$ **,**

כאשר z_1 **ברביע השני:** $\rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$**.**

(1) נתון: $\frac{z_1}{z_2}$ **מספר ממשי, ולכן החלק המדומה של** $\frac{z_1}{z_2}$ **שווה לאפס:** $\mathrm{Im}(\frac{z_1}{z_2}) = 0$ **.**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{cis\ \alpha}{cis\ \frac{7\alpha}{3}} = cis(-\frac{4\alpha}{3})$$

$$\sin(-\frac{4\alpha}{3}) = 0 \quad \leftarrow \mathrm{Im}(\frac{z_1}{z_2}) = 0$$

$$-\frac{4\alpha}{3} = \pi k \quad \rightarrow \alpha = \frac{3}{4}\pi k$$

$$\boxed{\alpha = \frac{3}{4}\pi} \quad \leftarrow \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

$$\boxed{z_1 = cis\frac{3}{4}\pi}$$

$$\boxed{z_2 = cis\frac{7}{4}\pi} \quad \leftarrow z_2 = cis\ (\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{4}\pi)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = cis\ (-\pi) = -1$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = cis\ \pi = -1}$$

תשובה: $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ **,** $\frac{z_1}{z_2} = cis\ \pi = -1$ **.**

(2) נראה כי : $z_1 \cdot z_2$ **הוא מספר מדומה, כלומר** $\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2) = 0$ **.**

$$z_1 \cdot z_2 = cis\frac{3}{4}\pi \cdot cis\frac{7}{4}\pi = cis\frac{10}{4}\pi = cis\ 2.5\pi$$

$$z_1 \cdot z_2 = cis\ 0.5\pi = i \quad \rightarrow \mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2) = 0$$

תשובה: הראינו ש- $z_1 \cdot z_2$ **הוא מספר מדומה.**

ב. נתון: $w=\frac{z_1}{z_2}+z_1\cdot z_2$.

$$w=-1+i$$

$$|w|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\tan\theta_w=\frac{1}{-1}=-1$$

$$\boxed{w=\sqrt{2}cis\,135^\circ}\quad\leftarrow 2nd\ quadrant$$

ג. נמצא את פתרונות המשוואה $z^3=w^6$.

$$z^3=w^6$$

$$w^6=(\sqrt{2}\ cis\,135^\circ)^6$$

$$w^6=(\sqrt{2})^6 cis\,(135^\circ\cdot 6)$$

$$w^6=8\ cis\,(810^\circ)$$

$$\boxed{w^6=8\ cis\,(90^\circ)=8i}$$

$$z^3=8\ cis\,(90^\circ)$$

$$z_k=\sqrt[3]{8}\ cis\,(\frac{90^\circ}{3}+\frac{360^\circ}{3}k)$$

$$z_k=2\ cis\,(30^\circ+120^\circ k)$$

$$\boxed{z_1=2\ cis\,30^\circ=\sqrt{3}+i}$$

$$\boxed{z_2=2\ cis\,150^\circ=-\sqrt{3}+i}$$

$$\boxed{z_3=2\ cis\,270^\circ=-2i}$$

תשובה: $z_1=2\ cis\,30^\circ=\sqrt{3}+i$ **,** $z_2=2\ cis\,150^\circ=-\sqrt{3}+i$ **,** $z_3=2\ cis\,270^\circ=-2i$.

ג. (1) שלושת הקודקודים שקבלנו מתאים למשולש שווה צלעות החסום במעגל $x^2+y^2=4$,

כי הזווית המרכזית שביניהם שווה, ושווה ל- $120°$ **.**

משושה משוכלל יתקבל כאשר הזווית המרכזית תהייה בת $60°$ **,**

ובהתאם ניתן להכניס מספר מרוכב מתאים בין כל שני פתרונות שקבלנו.

$$2\ cis\ (30°+60°)=\boxed{2\ cis\ (90°)=2i}$$

$$2\ cis\ (150°+60°)=\boxed{2\ cis\ (210°)=-\sqrt{3}-i}$$

$$2\ cis\ (270°+60°)=\boxed{2\ cis\ (330°)=\sqrt{3}-i}$$

תשובה: הקודקודים יכולים להתאים לשלושה מתוך ששה קודקודי משושה משוכלל,

והקודקודים האחרים יהיו:

$2\ cis\ (90°)=2i$ **-** $(0,2)$ **,**

$2\ cis\ (210°)=-\sqrt{3}-i$ **-** $(-\sqrt{3},-1)$

$2\ cis\ (330°)=\sqrt{3}-i$ **-** $(\sqrt{3},-1)$**.**

(2) כל עוד נחלק את הזווית המרכזית שבין שלושת הפתרונות שקבלנו בסעיף ב, לזוויות מרכזיות שוות,

נקבל קודקודים של מצולע משוכלל, החסום באותו מעגל $x^2+y^2=4$ **.**

אם נחלק לשלוש זוויות שוות נקבל מצולע משוכלל בעל 9 **צלעות,**

אם נחלק לארבע זוויות שוות נקבל מצולע משוכלל בעל 12 **צלעות.**

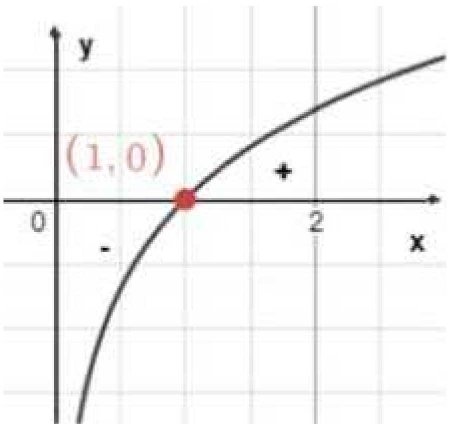
תשובה: $n=9,12,15,...$ **, כלומר כל** $n>6$ **שמתחלק ב-** 3**.**

א. נתונה הפונקציה : $f(x)=\ell n\left[(e^x-b)^2+1\right]$ **,** b **הוא פרמטר.**

(1) בתחום הגדרה, הארגומנט – הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית, צריך להיות חיובי.

$(e^x-b)^2\geq 0$ **, ולכן** $(e^x-b)^2+1\geq 1$ **, ומכאן שפונקציה מוגדרת לכל** x **.**

תשובה: תחום ההגדרה הוא כל x **.**



(2) אם נביט על הגרף המוכר של פונקציית $\ell n\, x$ **,**

נבין ש- $\ell n\, x\geq 0$ **, כאשר** $x\geq 1$ **, כלומר כשהארגומנט** $1\leq$ **.**

הראינו ש- $(e^x-b)^2+1\geq 1$ **ולכן** $f(x)\geq 0$ **לכל** x**.**

תשובה: הוכחנו ש- $f(x)\geq 0$ **בכל תחום ההגדרה של** $f(x)$ **.**

(3) נמצא את האסימפטוטות האופקיות של הפונקציה,

כלומר נחקור את התנהגות הפונקציה כאשר $x\to\pm\infty$ **.**

כאשר $x\to+\infty$ **אז** $e^x\to+\infty$ **ובהתאם** $(e^x-b)^2+1\to+\infty$ **וגם** $f(x)\to+\infty$ **ואין א. אופקית.**

כאשר $x\to-\infty$ **אז** $e^x\to 0^+$ **ובהתאם** $(e^x-b)^2+1\to b^2+1$

ובהתאם $f(x)\to\ell n\,(b^2+1)$ **ו-** $y=\ell n\,(b^2+1)$ **אסימפטוטה אופקית.**

תשובה: $y=\ell n\,(b^2+1)$ **אסימפטוטה אופקית, עבור** $x\to-\infty$ **(אסימפטוטה אופקית לשמאל).**

(4) נבדוק עבור אילו ערכי b**, יש לפונקציה** $f(x)=\ell n\left[(e^x-b)^2+1\right]$ **.**

$$\boxed{f'(x)=\frac{2e^x(e^x-b)}{(e^x-b)^2+1}}$$

$$e^x-b=0$$

$$e^x=b$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\ell n\, b \quad\to \boxed{b>0} \\ f(\ell n\, b)=\ell n\left[(e^{\ell n\, b}-b)^2+1\right]=\ell n\left[(b-b)^2+1\right]=\ell n(1)=0 \end{array}\right\}\boxed{(\ell n\, b,0)}$$

e^x **פונקציה עולה, ולכן גם** e^x-b **(הביטוי שקובע את סימני הנגזרת) הוא של פונקציה עולה,**

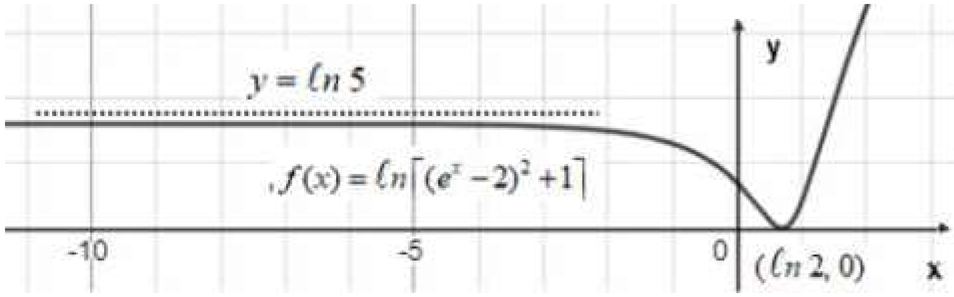
ומכאן ש- $f'(x)$ **עוברת משליליות לחיוביות כאשר** $x=\ell n\, b$ **,**

והפונקציה עוברת מירידה לעלייה וזו נקודת מינימום, ואומנם הראינו בתת סעיף א(2) ש- $f(x)\geq 0$ **.**

תשובה: $b>0$ **,** $(\ell n\, b,0)$ **נקודת מינימום.**

(5) עבור $b=2$ **,** $f(x)=\ell n\left[(e^x-2)^2+1\right]$ **,** $(\ell n\,2,0)$ **נקודת מינימום,**

ו- $y=\ell n\,5$ **אסימפטוטה אופקית, עבור** $x\to-\infty$**.**



ב. ראינו שכאשר $x\to-\infty$ **אז** $y=\ell n\,(b^2+1)$ **אסימפטוטה אופקית.**

מכאן ש- $y=\ell n\,5$ **אסימפטוטה אופקית, כאשר** $b^2+1=5$ **ולכן** $b=\pm2$ **.**

תשובה: עבור $b=\pm2$ **תהייה** $y=\ell n\,5$ **אסימפטוטה אופקית של גרף הפונקציה** $f(x)$ **, עבור** $x\to-\infty$**.**

ג. עבור $b=-2$ **אין לפונקציה** $f(x)$ **נקודת קיצון, כי** $b<0$ **.**

במקרה זה: $f(x)=\ell n\left[(e^x+2)^2+1\right]$ **ו-** $f'(x)=\dfrac{2e^x(e^x+2)}{(e^x+2)^2+1}$ **.**

כל הגורמים בפונקציית הנגזרת חיוביים, ולכן הנגזרת חיובית והפונקציה עולה לכל x **.**

תשובה: עבור $b=-2$ **הפונקציה עולה לכל** x **.**

בגרות פ יוני 20 מועד קיץ א שאלון 35582

א. נתונה הפונקציה $f(x)=e^x(x-5)$ **, המוגדרת לכל** x **.**

$$f'(x)=e^x(x-5)+e^x=e^x(x-5+1)\ \rightarrow \boxed{f'(x)=e^x(x-4)}$$
$$f''(x)=e^x(x-4)+e^x=e^x(x-4+1)\ \rightarrow \boxed{f''(x)=e^x(x-3)}$$

תשובה: הראינו ש- $f'(x)=e^x(x-4)$ **,** $f''(x)=e^x(x-3)$ **.**

ב. נתונה החוקיות: $f^{(n)}(x)=e^x(x-5+n)$ **, כי כמו שראינו הביטוי שבסוגריים גדל ב-** 1 **כל פעם.**

$$\left.\begin{array}{l} f'''(x)=e^x(x-3)+e^x=e^x(x-3+1)\ \rightarrow \boxed{f'''(x)=e^x(x-2)} \\ f^{(3)}(x)=e^x(x-5+3)=e^x(x-2) \end{array}\right\} o.k.$$

תשובה: $f'''(x)=e^x(x-2)$ **, והראינו שהחוקיות מתקיימת עבור** $n=3$ **.**

ג. נחקור את הפונקציה $f^{(n)}(x)=e^x(x-5+n)$ **.**

(1) ציר y **:** $x=0$ **-** $f^{(n)}(0)=e^0(0-5+n)=n-5\quad \rightarrow \boxed{(0,n-5)}$ **.**

ציר x **:** $y=0$ **-** $0=x-5+n\quad \rightarrow x=5-n\quad \rightarrow \boxed{(5-n,0)}$ **.**

תשובה: $(0,n-5)$ **,** $(5-n,0)$ **.**

(2) נמצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של $f^{(n)}(x)$ **.**

כאשר $x\rightarrow+\infty$ **אז** $e^x\rightarrow+\infty$ **ובהתאם וגם** $f(x)\rightarrow+\infty$ **ואין אסימפטוטה אופקית.**

כאשר $x\rightarrow-\infty$ **אז** $e^x\rightarrow 0^+$ **, מהר יותר מאשר** $x-n+5\rightarrow-\infty$ **,**

ולכן $y=0$ **אסימפטוטה אופקית.**

תשובה: $y=0$ **אסימפטוטה אופקית, עבור** $x\rightarrow-\infty$ **(אסימפטוטה אופקית לשמאל).**

(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של $f^{(n)}(x)$ **.**

$$f^{(n+1)}(x)=e^x(x-4+n)$$
$$0=x-4+n\quad \rightarrow x=4-n$$
$$\left.\begin{array}{l} f^{(n+2)}(x)=e^x(x-3+n) \\ f^{(n+2)}(4-n)=e^{4-n}(4-n-3+n)=e^{4-n}>0 \end{array}\right\}\min$$
$$f^{(n)}(4-n)=e^{4-n}(4-n-5+n)=-e^{4-n}\quad \rightarrow \boxed{(4-n,-e^{4-n})\min}$$

תשובה: $(4-n,-e^{4-n})$ **, מינימום.**

(4) $f^{(m)}(x)=e^x(x-5+m)$ **,** $f^{(k)}(x)=e^x(x-5+k)$ **.**

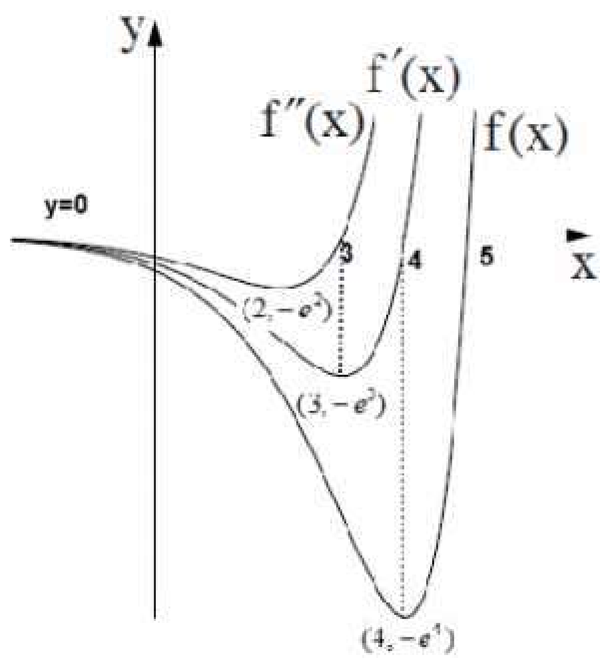
$$f^{(k)}(x)=f^{(m)}(x)$$
$$e^x(x-5+k)=e^x(x-5+m) \quad /:e^x>0$$
$$x-5+k=x-5+m$$
$$k=m$$

אולם, נתון כי k,m **מספרים שונים, ולכן הגרפים של** $f^{(k)}(x)$ **ו-** $f^{(m)}(x)$ **אינם נחתכים.**

תשובה: הראינו שהגרפים של הפונקציות $f^{(k)}(x)$ **ו-** $f^{(m)}(x)$ **אינם נחתכים, עבור** $m\neq k$ **.**

(5) נרכז את ממצאי החקירה בטבלה מתאימה.

	ציר y $(0,n-5)$	**ציר** x $(5-n,0)$	**נקודת מינימום** $(4-n,-e^{4-n})$	**אסימפטוטה אופקית**
$f(x)$	$(0,-5)$	$(5,0)$	$(4,-e^4)$	$x\to-\infty$ **,** $y=0$
$f'(x)$	$(0,-4)$	$(4,0)$	$(3,-e^3)$	$x\to-\infty$ **,** $y=0$
$f''(x)$	$(0,-3)$	$(3,0)$	$(2,-e^2)$	$x\to-\infty$ **,** $y=0$



ד. על בסיס החוקיות הנתונה, כאשר נתון שהפונקציה הקדומה $\mathrm{F}(x)$ **עוברת בראשית הצירים:**

$$\mathrm{F}(x)=\int f(x)dx==\int e^x(x-5)dx=e^x(x-6)+c$$
$$0=e^0(0-6)+c \quad \to c=6 \quad \to \boxed{\mathrm{F}(x)=e^x(x-6)+6}\ .$$
$$\mathrm{F}'(x)=e^x(x-6)+e^x \quad \to \mathrm{F}'(x)=e^x(x-5) \quad \to \boxed{\mathrm{F}'(x)=f(x)\ o.k.}$$

תשובה: $\mathrm{F}(x)=e^x(x-6)+6$ **.**